Allgemeine und besondere

Auflösungen

der in

Uflakker's algebraischem Exempelbuche

vorkommenden Aufgaben,

welchen

noch andere beigefügt worden.

Dritte,
nach der sechsten Auflage des Exempelbuchs eingerichtete,
verbesserte und vermehrte Auflage.

Herausgegeben
von
Dr. J. Hilzheimer.

Braunschweig,
im Verlage der Schulbuchhandlung.
1830.

Vorrede
zur zweiten Auflage.

Die, im Jahre 1801 in der Reichardschen Verlagshandlung, vom Herrn Hofrath Hellwig herausgegebenen allgemeinen und besonderen Auflösungen der in Uflakker's algebraischem Exempelbuche vorkommenden Aufgaben haben sich vergriffen, und ist eine neue Auflage derselben nothwendig geworden. Von dem ersten Herrn Herausgeber sowohl, als von Herrn Vieweg, welcher das Verlagsrecht dieses Buchs an sich gekauft, aufgefordert, diese neue Aufgabe zu besorgen, habe ich derselben die durch die Umstände nothwendig gewordenen Veränderungen und Zusätze gegeben. Sie ist, wie auch schon der Titel besagt, nach der fünften Auflage des Uflakkerschen Exempelbuchs eingerichtet, und enthält mithin auch die Auflösungen der in dieser Auflage hinzugekommenen Aufgaben, jedoch mit Ausnahme der zur arithmetischen und geometrischen Progression gehörigen, welche durch leichte Substitutionen gefunden werden können, da die Formeln dazu im Exempelbuche selbst angegeben sind. Aus eben dem Grunde sind auch die Aufgaben des 17ten und 18ten Abschnitts übergangen, und, bei den unbestimmten Aufgaben, diejenigen neu hinzugekommenen weggelassen, welche sich in des Herrn Hofraths Hellwig Anfangsgründen der unbestimmten Analytik (welches Buch in eben dem Verlage zu haben ist) aufgelöst finden. Uebrigens sind manche Auflösungen abgeändert, anderen neue hinzugefügt' worden; und um das Werkchen auch für eine, vielleicht bald erscheinende neue Auflage des Uflakkerschen Exempelbuchs recht brauchbar zu machen, sind, bei den vermischten Aufgaben, auch die Auflösungen derjenigen Aufgaben gegeben, mit welchen die neue Ausgabe vermehrt werden wird. Auch hat diese Ausgabe durch einen schönen und correcten Druck einen bedeutenden Vorzug vor der ältern erhalten.

Braunschweig, im September 1824.

Dr. Hilzheimer.

Vorrede
zur dritten Auflage.

Diese neue Ausgabe ist ganz nach der eben erschienenen sechsten Ausgabe des Uflakkerschen Exempelbuchs eingerichtet, und enthält daher auch die Auflösungen der 13 neu hinzugekommenen Aufgaben. Es sind bei diesen Auflösungen gleich die kürzesten gegeben, und die dazu erforderlichen besondern Kunstgriffe so deutlich, als mir möglich war, erklärt worden, welches Lehrern und Lernenden gewiß willkommen seyn wird.

Braunschweig, im August 1829.

Dr. Hilzheimer.

I.

1.

A sey den 1. Januar 1796 x Jahr alt gewesen, also mit dem Anfange des 19ten Jahrhunderts, d. i. den ersten Januar 1801 5 Jahre älter, also $x + 5$ Jahr; dies soll nun ein halbes Jahrhundert oder 50 Jahre seyn. Man hat daher die Gleichung $x + 5 = 50$

folglich $x = 50 - 5 = 45$.

2.

B sey jetzt x Jahr alt, so war er vor 7 Jahren $x - 7$ Jahr alt; damals war sein Alter 50 Jahr, also hat man die Gleichung $x - 7 = 50$

folglich $x = 50 + 7 = 57$

3.

A habe x Thaler; wird dieses nun von dem Vermögen des B oder von 5000 Thaler genommen, so bleibt $5000 - x$; dies muß so viel als 2000 Thaler seyn;

folglich ist $5000 - x = 2000$

also $2000 + x = 5000$

folglich $x = 5000 - 2000 = 3000$.

4.

Wenn das gewöhnliche Schlafgeld in Gr. $= x$
so erbot sich nach der Aufgabe A zu zahlen $= 3x$
und B zu zahlen $= 5x$.
Der Wirth erhielt 24 Gr.
Daher $3x + 5x = 8x = 24$
Also $24 : 8 = x = 3$.
A zahlte also 9 Gr.
B » » 15 Gr.

Allgemeine Auflösung.

Wenn das gewöhnliche Schlafgeld $= x$
und A erbot sich zu zahlen $= ax$
B » » » » $= bx$
und der Wirth erhielt $= C$
so ist $ax + bx = C$
$(a + b)\, x = C$

$$x = \frac{C}{a + b}$$

5.

Es sey das, was der Erbe A in Thlr. erhalte $= x$
so ist nach der Aufgabe das, was der Erbe B erhält $= 9x$
und was Beide erhalten $= 150$ Thlr.
Daher $10x = 150$
$x = 150 : 10 = 15$ für A.
$9x = 15 \times 9 = 135$ für B.

Allgemeine Auflösung.

Die Erbschaft sey . . . . $= E$
A erhalte . . . . $= x$
B also . . . . $= E - x$
Beide erhalten ihre Portion in dem Verhältnisse $= m : n$
so ist $x : E - x = m : n$ und
$nx = (E - x)\, m = Em - mx$
$nx + mx = Em$
$(n + m)\, x = Em$

$$x = \frac{Em}{n + m}$$

6.

Auf dem Tische lagen in Thalern $= x$
A hatte nach der Aufgabe . . . $= 3x$
B » » » » . . . $= 12x$
C » » » » . . . $= 60x$
Was alle drei hatten, war . . . . $= 600$ Thlr.
Daher $3x + 12x + 60x = 600$
$75x = 600$
$x = 600 : 75 = 8$.
A hatte also $3x = 24$ Thlr.
B » » $12x = 96$ »
C » » $60x = 480$ »

Allgemeine Auflösung.

Auf dem Tische lagen in Thlrn. . . . $= x$
A hatte . . . . $= ax$
B » . . . . $= bx$
C » . . . . $= cx$
Alle drei hatten . . . . $= D$

Daher $ax + bx + cx = D$

$$(a + b + c)\,x =$$

$$x = \frac{D}{a+b+c}$$

daher hatte $A = \frac{aD}{a+b+c}$

$$B = \frac{bD}{a+b+c}$$

$$C = \frac{cD}{a+b+c}$$

7.

Ich habe x Thlr. Daher nach der Aufgabe

$$2x + 5x + x = 100$$

$$8x = 100$$

$$x = \tfrac{100}{8} = 12\tfrac{1}{2}.$$

8.

Wenn A erhält x Dukaten, so erhält nach der Aufgabe

B » 2x »

C » 6x »

D » 24x. Daher

$$33x = 165$$

$$x = 5.$$

Es erhält also A 5 Duk.

B 10 »

C 30 »

D 120 »

9.

Wenn A bekommt 2x, so bekommt nach der Aufgabe

B » 3x

C » 4x

Daher ist $2x + 3x + 4x = 24$

$$9x = 24$$

$$x = 2\tfrac{2}{3}.$$

A $5\tfrac{1}{3}$; B 8; C $10\tfrac{2}{3}$.

9. a.

Bekommt A. mx, so bekommt B. nx und C. px. Es ist also $(m + n + p)\,x = S$; folglich

$x = \frac{S}{m+n+p}$, daher erhält

A. $mx = \frac{mS}{m+n+p}$, B. $nx = \frac{nS}{m+n+p}$

und C. $px = \frac{pS}{m+n+p}$

10.

Bekommt A. 5x, so bekommt B. 11x und C. $11x + 5x = 16x$; da nun alle 3 zusammen 864 Morgen haben, so folgt das $2(11 + 5)\,x$, oder $32x = 864$, folglich $x = \frac{864}{32} = 27$;

daher erhält A. $5x = 5 \times 27 = 135$ Morgen

B. $11x = 11 \times 27 = 297$ »

und C. $16x = 16 \times 27 = 432$ »

11.

Die Anzahl der Studenten sey x, so ist die der Offiziere $2x$ und die der Kaufleute $5x$; da nun die ganze Gesellschaft aus 80 Personen bestand, so hat man die Gleichung $x + 2x + 5x = 80$

oder $8x = 80$, folglich $x = 10$; also

10 Studenten und daher die Anzahl der Offiziere $2x = 20$

und die der Kaufleute $5x = 50$

12.

Des Kaufmanns erste Anlage ist	x
Am Ende des ersten Jahrs ist sein Vermögen	$2x$
und am Ende des neunten Jahrs	$10x$

Daher nach der Aufgabe $10x = 2000$

$x = 200$

13.

Wenn das Begegnen in x Tagen geschieht; so ist A $5x$ Meilen, B $3x$ Meilen gegangen. Da nun beide 360 Meilen beim Punkt des Begegnens gegangen sind, so ist

$$5x + 3x = 360$$

$$x = 45.$$

Daher ist A gegangen 225 Meilen.

» » B » 135 »

14.

Folgt aus der vorigen.

15.

Es ist nach der Aufgabe die jährliche Besoldung

des Verwalters	= 50 Thlr.
des Kammerdieners	= 40 »
des Kochs	= 35 »
der 5 Domestiken	= 100 »
Daher die ganze jährliche Besoldung . . .	= 225 Thlr.

Bekommt nun jeder auf einen Thlr. seiner Besoldung x Thlr. des Vermächtnisses, so bekommt der Verwalter $50x$, der Kammerdiener $40x$ u. s. w.

Folglich ist $50x + 40x + 35x + 100x = 2000$

und $225x = 2000$

$$x = \tfrac{2000}{225} = \tfrac{80}{9}.$$

Daher der Verwalter	$50x = \tfrac{80}{9} \times 50 =$	$444\tfrac{4}{9}$
der Kammerdiener	$40x = \tfrac{80}{9} \times 40 =$	$355\tfrac{5}{9}$
der Koch	$35x = \tfrac{80}{9} \times 35 =$	$311\tfrac{1}{9}$
die 5 Domestiken	$100x = \tfrac{80}{9} \times 100 =$	$888\tfrac{8}{9}$
	Summe	2000

16.

Das erste Capital bringt jährlich	20 Thlr.
Das andere	30 »

In x Jahren sollen 125 Thlr. Zinsen einkommen. Daher

$$20x + 30x = 125$$

$$50x = 125$$

$$x = 2\tfrac{1}{2}.$$

17.

Das Capital K sey zu x Proc. jährlich verzinset, dies bringt auf 700 Thlr. $7x$ jährliche Zinsen, und also in 4

Jahren 28 x. Das Capital C von 600 Thlr. giebt jährlich 18 Thlr. Zinsen, also in 4 Jahren 72 Thlr. Da nun diese beide Summen 128 Thlr. Zinsen bringen, so erhält man die Gleichung $28x + 72 = 128$

also $28x = 128 - 72 = 56$ folglich

$$x = \tfrac{56}{28} = 2.$$

18.

Es sey das zweite Capital oder K x, so bringen die jährl. Zinsen zu 3 p.C. $\frac{3x}{100}$ nach dem Verhältniß von 3 : 100, also in 5 Jahren $\frac{15x}{100} = \frac{3x}{20}$. Das erste Capital von 300 Thaler giebt zu 6 p.C. Zinsen jährlich 18 Thaler und in 5 Jahren 90 Thlr. Zinsen. Da nun die fünfjährigen Zinsen beider Capitale 165 Thlr. betragen,

so giebt dies die Gleichung $\frac{3x}{20} + 90 = 165$

also $\frac{3x}{20} = 165 - 90 = 75$ daher

$3x = 20 \times 75 = 1500$ also

$$x = \frac{1500}{3} = 500.$$

18. a.

C giebt jährlich zu p p.C. $\frac{pC}{100}$ Zinsen, also in n Jahren $\frac{npC}{100}$

K bringt zu q p.C. jährlich $\frac{qK}{100}$

also in n Jahren $\frac{nqK}{100}$; da nun beide Capitale in n Jahren z Zinsen bringen, so ist

$$\frac{npC}{100} + \frac{nqK}{100} = z \quad \text{also}$$

$$npC + nqK = 100z \quad \text{daher}$$

$$nqK = 100z - npC \quad \text{folglich}$$

$$q = \frac{100z - npC}{nK} = \frac{(100z : n) - pC}{K}$$

Ferner folgt aus der Gleichung $npC + nqK = 100z$

$$n(pC + qK) = 100z \quad \text{also } n = \frac{100z}{qK + pC}$$

19.

Der Hafer koste . . . . x Thlr.;

so kostet der Rokken . . . . 2 x »

Da nun $15x + 60x = 25$

so ist $x = \frac{1}{3}$

$2x = \frac{2}{3}.$

20.

Wenn Hephästions Alter in Jahren . . . $= x$

so ist in der Aufgabe Alexanders Alter . . $= x + 2$

Clytus » . . $= 2x + 6$

Nun war Callisthenes Vater » . . $= 96$

und so alt wie die drei erstern.

Daher $4x + 8 = 96$

$x = \frac{96 - 8}{4} = 22$ Hephästions Alter

$x + 2 = 24$ Alexanders Alter

$2x + 6 = 50$ Clytus Alter.

21.

Wenn der dritte Sohn bekommt in Thlr. x
so bekommt nach der Aufgabe der zweite . . . . $x + 100$
der dritte . . . . $x + 300$

Daher $3x + 400 = 1600$. Also
$x = 400$.

22.

Wenn die jährliche Besoldung x Thlr.; so behielt er übrig
in den drei erstern Jahren $3x - 900$
im vierten Jahre . . . . . . $x - 400$
im fünften » . . . . $x - 500$
im sechsten » . . . . $x - 600$.

Daher nach der Aufgabe $6x - 2400 = 2600$
$6x = 5000$
$x = 833\frac{1}{3}$.

23.

Es bekomme D x; so bekommt nach der Aufgabe
C $4x - 300$
B $12x - 1100$
A $24x - 2300$

Daher $41x - 3700 = 8600$
$41x = 12300$
$x = 12300 : 41 = 300$.

Es bekommt also D $x = 300$
C $4x - 300 = 900$
B $12x - 1100 = 2500$
A $24x - 2300 = 4900$
Summe 8600.

24.

Der Bettler hatte . . . . x Gr.,
erbettelte eben so viel dazu und hatte nun . . . $2x$,
kaufte für 4 Gr. Brodt und erhielt nun . . . . $2x - 4$
Am andern Tage erbettelte er eben so viel und
hatte nun . . . . $4x - 8$
kaufte für 8 Gr. Fleisch und behielt . . . . . . $4x - 16$
Am dritten Tage erbettelte er eben so viel und
hatte nun . . . . $8x - 32$
trinkt für 8 Gr. Wein und giebt dadurch sein Geld aus.

Daher nach der Aufgabe $8x - 40 = 0$
und $x = 5$.

25.

Wenn die Anzahl der Thlr. . . . . $= x$,
so sollen nach der Aufgabe seyn $10x = x + 10$
also $9x = 10$
$x = \frac{10}{9}$

Allgemeine Auflösung.

Wenn $cx = x + c$
so ist $cx - x = c$
$(c - 1)\,x = c$

$$x = \frac{c}{c-1}$$

26. u. 26 a.

Wenn diese Zahl . . . . $= x$
so ist nach der Aufgabe $19x = x + 6$
Daher $18x = 6$
$x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

Allgemeine Auflösung.

Wenn $cx = x + b$

so ist $cx - x = b$

$(c - 1)\,x = b$

$$x = \frac{b}{c-1}$$

Noch allgemeiner werden Aufgaben dieser Art vorgestellt durch

$cx = dx + b$. Daher denn

$cx - dx = b$

$(c - d)\,x = b$

$$x = \frac{b}{c-d}$$

Setzt man hier $d = 1$, so wird $x = \frac{b}{c-1}$ wie zuvor.

Setzt man $d = 1$ und $b = c$, so wird $x = \frac{c}{c-1}$

27.

Es sey das Capital Anfangs des 1sten Jahrs $= C$;

so ist nach der Aufgabe dasselbe

am Schlusse des 1sten Jahrs $= 2C = a$

» » » 2ten » $= 4C - 2a - b$

» » » 3ten » $= 8C - 4a - 2b - c = 0$.

Daher $C = \frac{4a + 2b + c}{8}$.

Im vorliegenden Fall war $a = 800$; $b = 1600$; $c = 2400$.

Also $C = \frac{8800}{8} = 1100$.

Da auch in dem gegebenen Fall $2a = b$; $3a = c$;

so war $C = \frac{11a}{8} = 1100$ wie zuvor.

28.

Es bezahle der Kaufmann für 1 Stück schwarzes Tuch x;

so bezahlt er für 10 Stück . . . . . $= 10x$

für 1 Stück braunes Tuch $(x + 1)$;

so bezahlt er für 13 Stück $13\,(x + 1) = 13x + 13$

für 1 Stück grünes Tuch $(x + 6)$;

so bezahlt er für 18 Stück $18\,(x + 6) = 18x + 108$

für 1 Stück rothes Tuch $(x + 11)$;

so bezahlt er für 20 St. $20\,(x + 11) = 20x + 220$

alle kosten daher $61x + 341 = 1500$ nach der Aufgabe.

Daher $x = 19$.

Also kostet das schwarze Tuch $10x = 190$ u. s. f.

29.

Wenn der jüngste x Jahre alt; so ist nach der Aufgabe der älteste $x + 20$ Jahre, und

$x + 20 = 3x$.

Also $x = 10$.

30.

Wenn der Vater 46 Jahre alt und in x Jahren das Alter seiner beiden Söhne erreicht; so ist er dann alt $46 + x$ Jahre.

Sein jetzt 11 Jahr alter Sohn . . . . . $11 + x$ Jahre.

» » 9 Jahr » » . . . . . $9 + x$ Jahre.

Daher $x + 46 = (11 + x) + (8 + x)$

$x + 46 = 20 + 2x$.

und $26 = x$.

Der Vater ist also dann alt $46 + x = 46 + 26 = 72$.

Der ältere Sohn . . . . . . $11 + x = 11 + 26 = 37$.

Der jüngere Sohn . . . . . $9 + x = 9 + 26 = 35$.

Allgemeine Auflösung.

Wenn das Alter des Vaters in Jahren ..... $= V$
des ältern Sohnes .... $= S$
des jüngern Sohnes .... $= F$
und der Vater soll in x Jahren m mal so alt werden als seine Söhne; so ist dann

$$V + x = m\,[(S + x) + (F + x)]$$
$$= m\,(S + F + 2x)$$
$$= mS + mF + 2mx$$
$$V - mS - mF = 2mx - x = (2m - 1)\,x$$

Also $x = \frac{V - mS - mF}{2m - 1} = \frac{V - m.(S + F)}{2m - 1}$

31.

Gesetzt dies geschieht in x Jahren, so ist alsdann mein Alter $46 + x$, das meines Sohnes $23 + x$. Da ich nun alsdann noch einmal so alt seyn werde als mein Sohn, so ist $46 + x = 2\,(23 + x) = 46 + 2x$ daher $x = 2x$ folglich $x = 0$ d. i. der Zeitpunkt ist jetzt da.

32.

Es geschehe dies in x Jahren, so werde ich alsdann $50 + x$, mein Sohn aber $26 + x$ Jahre alt seyn, also ist $26 + x = \frac{50 + x}{2}$ daher

$52 + 2x = 50 + x$ also
$x + 52 = 50$
folglich $x = 50 - 52 = -2$

also x negativ, welches anzeigt, daß dieser Zeitpunkt schon 2 Jahre vorüber ist.

33 u. 33 a.

Wenn das geschehen soll in x Jahren;
so ist der Vater nach der Aufgabe dann alt $46 + x$ Jahre
der Sohn » » » » » $11 + x$ »
Wenn also dann der Sohn halb so alt als der Vater seyn soll, so ist $x + 46 = 2\,(x + 11) = 2x + 22$
Folglich $24 = x$.

Der Vater ist also dann alt $46 + x = 46 + 24 = 70$.
» Sohn » » » » $11 + x = 11 + 24 = 35$.

Der Vater daher noch einmal so alt als der Sohn.

Allgemeine Auflösung.

Wenn der Vater V Jahre alt,
der Sohn S Jahre alt, und es ist der Vater in x Jahren m mal so alt als der Sohn, so ist

$$x + V = m\,(x + S) = mx + mS$$

Daher $V - mS = mx - x = (m - 1)\,x$

Folglich $= \frac{V - mS}{m - 1}$

34.

Die Anzahl der Gulden, welche die Griechin bei sich hatte, da sie in den Tempel Jupiters ging, sey $= x$
nachdem sie Jupiter verdoppelt hatte .... $= 2x$
nach dem Opfer .... $= 2x - 2$
durch den Apollo wurde es .... $= 4x - 4$
und blieb nach dem Opfer.......... $= 4x - 6$
und da sie nun nach der Aufgabe doppelt so viel hatte als bei ihrem Eintritt in Jupiters Tempel; so war

$$4x - 6 = 2x$$
$$2x - 6 = 0$$
$$2x = 6$$
$$x = 3.$$

35.

Da die Griechin 4 Gulden bei sich hatte, und den Jupiter um die dreifache Vermehrung bat, und der Gott auch ihre Bitte erfüllte, so hat sie dadurch 12 fl. erhalten; was sie nun davon geopfert hat, heiße x, es blieben ihr also noch $12 - x$. Dieses Geld vermehrte nun Apollo abermals um das Dreifache; sie erhielt also dadurch $3(12 - x) = 36 - 3x$; davon opferte sie wieder x; was sie daher mit nach Hause nahm, war also $36 - 3x - x = 36 - 4x$. Es ist daher $36 - 4x = 12$ oder $4x + 12 = 36$, also $4x = 36 - 12 = 24$ folglich $x = \frac{24}{4} = 6$.

36.

Der Bote A, welcher täglich 5 Meilen geht, hat in x Tagen zurückgelegt 5x Meilen, aber wegen der 8 Tage, die er vor dem andern voraus hat, noch 40 Meilen. Der Bote B, welcher täglich 7 Meilen geht, hat bei dem Punkt des Einholens 7x Meilen zurückgelegt. Daher

$$5x + 40 = 7x \quad \text{und}$$
$$x = 20.$$

37.

Wenn man nach der vorigen Aufgabe x weiß; so weiß man auch 7x, und hiermit die verlangte Meilen-Zahl.

38.

A schreibt in $x + 10$ Tagen; $5x + 50$ Bogen.
B » » x Tagen $7x$ Bogen.

Daher $7x = 5x + 50$
$x = 25.$

A schreibt also $5x + 50 = 175.$
B » » $7x = 175.$

39.

500 Thlr. bringen jährlich zu 4 p.C. . . 20 Thlr. Zinsen.
500 » » in $3\frac{1}{2}$ Jahren . . . . 70 »
480 » » jährlich zu 5 p.C. . . 24 »

Wenn nun in x Jahren beide Capitalien gleich viel Zinsen eingebracht haben sollen; so sind

$$20x + 70 = 24x \quad \text{also}$$
$$x = 17\tfrac{1}{2}.$$

39 a.

Das Capital C bringt jährlich zu p. p.C. $\frac{pC}{100}$

das » K » » » q. p.C. $\frac{qK}{100}$

C in r Jahren . . $\frac{prC}{100}$

Da nun beide Capitale noch so lange stehen sollen, bis beide gleich viel Interessen bringen, so setze man die Anzahl Jahre $= z = n - r$

Dies giebt für C . . . . $\frac{pzC}{100}$ Interessen

für K . . . . $\frac{qzK}{100}$ »

Da die sämmtlichen Interessen denen von K gleich sind, so ist $\frac{prC}{100} + \frac{pzC}{100} = \frac{qzK}{100}$ oder

$$prC + pzC = qzK$$

daher $qzK - pzC = prC$, folglich

$$(qK - pC)\, z = prC \quad \text{daher}$$

$$z = \frac{prC}{qK - pC} \text{ und also } n = z + r = \frac{qrK}{qK - pC}$$

40.

Es koste eine Elle nach dem abgedungenen: x Thlr.; so kosten die 30 Ellen 36x, und der Käufer bezahlt nach der Aufgabe $36x = 120 - 4x$

Also $x = 3$.

Folglich $36x = 108$.

41.

Ist die Anzahl der Arbeitstage $= x$; so ist nach der Aufgabe die Anzahl derer, wo nicht gearbeitet wurde $= 84 - x$.

An den Arbeitstagen verdient der Arbeiter $9x$ Gr.

An den Tagen, an welchen der Arbeiter nicht arbeitet, muß er für Kost zahlen $3(84 - x)$

und da beides bei der Abrechnung gegen einander aufgeht;

so ist $9x = 3(84 - x)$

$= 252 - 3x$.

Also $12x = 251$

$x = 21$.

41 a.

Ist die Anzahl der Arbeitstage d, so ist die der Feiertage T — d. Für jeden Arbeitstag erhält er c Groschen, folglich für d Tage cd; für jeden Feiertag aber muß er an A b Gr. vergüten, folglich für T — d Feiertage

$b(T - d) = Tb - bd$.

Nach der Aufgabe muß nun

$cd = Tb - bd$ seyn, daher

$cd + bd = Tb$ oder

$(c + b)d = Tb$ folglich

$$d = \frac{Tb}{c + b}$$

42.

In der Gesellschaft war die Anzahl der Frauen $= x$.

die Anzahl der Männer $= mx$.

Daher war die Anzahl der Personen in der Gesellschaft . . . . $= (m + 1)x$,

Nachdem n Paar weggegangen, blieb die Anzahl

der Frauen . . . . $= x - n$.

der Männer . . . . $= mx - n$.

Wenn nun $x - n : mx - n = p : q$; so ist

$qx - qn = pmx - pn$

und $x = \frac{(p - q)n}{pm - q}$.

Nach der Aufgabe ist $m = 3$; $n = 4$; $q = 4$; $p = 1$.

Also $x = 12$

und $(m + 1)x = 48$.

42 a.

Die Auflösung dieser Aufgabe findet sich Nro. 161 b.

43.

Wenn die Anzahl der Männer . . . . . . $= x$

So ist nach der Aufgabe die Anzahl der Weiber . . . . $= 20 - x$

Daher haben die Männer verzehrt Ggr. $= 8x$

die Weiber verzehrt Ggr. $= 7(20 - x)$

Verzehrt haben alle 6 Thlr. . . . . . . $= 144$ Ggr.

Daher $8x + 7(20 - x) = 144$

$8x + 140 - 7x = 144$

$x = 4$ und

$20 - x = 16$.

44.

Wenn die Anzahl der Meister . . . . $= x$

So ist nach der Aufgabe die Anzahl der Gesellen . . . . $= 20 - x$

Die Meister bezahlen Gr. . . . . $= 6x$

Die Gesellen . . . . $= 4(20 - x)$

Verzehrt haben alle 2 Thlr. 18 Gr. . . . $= 90$ Gr.

$$\text{Daher } 6x + 4(20 - x) = 90$$
$$6x + 80 - 4x = 90$$
$$2x = 10$$
$$x = 5 \text{ die Anzahl der Meister.}$$
$$20 - x = 15 \text{ die Anzahl d. Gesellen.}$$

45.

Die Anzahl der Reuter sey . . . . $= x$

Daher die Anzahl der Infanteristen . . $= 300 - x$

Der Reuter monatlicher Sold ist nach der Aufgabe in Thlrn. . . . . $= 8x$

Der Infanteristen monatlicher Sold . . $= 5(300 - x)$

$$\text{Daher } 8x + 5(300 - 5x) = 1800$$
$$8x + 1500 - 5x = 1800$$
$$3x = 300$$
$$x = 100 \text{ und}$$
$$300 - x = 200 \text{ Infanteristen.}$$

46.

Wenn zu einer Erbschaft von 3600 Thlr. 11 Kinder sind, worunter . . . . x Töchter

so sind da . . . . $11 - x$ Söhne.

Die Töchter sollen nach der Aufg. erhalten in Thlr. $360x$

Die Söhne » » » » » » $300(11 - x)$

$$\text{Daher } 360x + 300(11 - x) = 3600$$
$$360x + 3300 - 300x = 3600$$
$$60x = 300$$
$$x = 300 : 60 = 5 \text{ Töchter}$$
$$\text{und } 11 - x = 6 \text{ Söhne.}$$

46 a.

Ist die Anzahl der Männer m, so ist die Anzahl der Frauen $f = P - m$. Da nun jeder Mann a Thaler verzehrt, so verzehren alle ma; jede Frau hingegen verzehrt b Thaler, also alle $(P - m)b$ Thaler; dadurch entsteht die Gleichung

$$ma + Pb - mb = T \text{ Thaler, daher}$$
$$ma - mb = T - Pb \text{ oder}$$
$$m(a - b) = T - Pb \text{ folglich}$$
$$m = \frac{T - Pb}{a - b} \text{ und}$$
$$f = P - m = P - \left\{\frac{T - Pb}{a - b}\right\} = \frac{aP - T}{a - b}$$

47.

Die Infanteristen erhalten insgesammt monatlich $5 \times 200 = 1000$ Thlr., folglich erhalten die Cavalleristen sämmtlich $3600 - 1000 = 2600$ Thaler.

Es sey ihre Anzahl x, so beträgt ihre sämmtliche Löhnung $8x$. Man hat daher $8x = 2600$,

$$\text{folglich } x = \frac{2600}{8} = 325$$

welche mit den 200 Infanteristen zusammen 525 Mann ausmachen.

47 a.

Aus der Gleichung in Nro. 46 a.

$$m = \frac{T - bP}{a - b} \quad \text{folgt}$$

$$ma - mb = T - bP \quad \text{daher}$$

$$ma + bP = T + mb, \quad \text{also}$$

$$bP = T + mb - ma \quad \text{folglich}$$

$$P = \frac{T + mb - ma}{b}$$

$$= \frac{T + m(b - a)}{b} = \frac{T - m(a - b)}{b}$$

48.

Es sey der Werth des Kleides in Thlr. .... $= x$

An diesem hat der Herr nach vier Monaten noch zu fordern .... $= \frac{2x}{3}$

Dagegen ist die Forderung des Bedienten wegen seines viermonatlichen Lohns .... $= 10$ Thl.

Folglich ist nach der Aufgabe $\frac{2x}{3} = 10$

und $x = \frac{10 \times 3}{2} = 15$

Allgemeine Auflösung.

Es sey der Werth des Kleides in Thlr. .. $= x$

so ist das, was der Bediente im mten Theil des Jahrs abverdient .... $= \frac{x}{m}$

und in n solchen Theilen .... $= \frac{nx}{m}$

Daher hat der Herr nach $\frac{n}{m}$ solchen Theilen des Jahrs an dem Kleide noch gut. .. $= x - \frac{nx}{m}$

Ist der jährliche Lohn des Bedienten in Thlr. $= L$

also im mten Theil des Jahrs .... $= \frac{L}{m}$

und in n solchen Theilen .... $= \frac{nL}{m}$

so ist

$$x - \frac{nx}{m} = \frac{nL}{m}$$

$$\frac{xm - nx}{m} = \frac{nL}{m}$$

$$xm - nx = nL$$

$$(m - n)\,x = nL$$

$$x = \frac{nL}{m - n}$$

m ist $= 365;\ 52;\ 12$ nachdem in Ansehung der Dienstzeit von Tagen, Wochen oder Monaten die Rede ist; n aber ist die Anzahl der Tage Wochen oder Monate.

49.

Setzt man in die allgemeine Formel

$$x = \frac{nL}{m - n} \quad x = 20, \ n = 1, \ m = 4,$$

so hat man $\frac{L}{4 - 1} = 20$

oder $\frac{L}{3} = 20$

also $L = 60$

50.

Setzt man in die allgemeine Formel

$$x = \frac{nL}{m-n} = \frac{\frac{nL}{m}}{1-\frac{n}{m}} \quad L=90,\ x=30,\ \frac{n}{m}=z;$$

so ist $\frac{90z}{1-z} = 30$ daher

$$90z = 30 - 30z$$
$$120z = 30$$
$$z = \tfrac{30}{120} = \tfrac{1}{4} \text{ Jahr oder 3 Monate.}$$

51.

Hat A x Schaafe; so hat nach der Aufgabe
B 3x und
C $\frac{3x}{4}$. Alle haben 19. Daher

$$4\tfrac{3}{4}x = 19 \quad \text{also}$$
$$\frac{19x}{4} = 19 \quad \text{und}$$
$$x = 1 \times 4 = 4.$$

52.

Es sey das Capital . . . . $= x$

so sind die einjährigen Zinsen desselben zu 5 p. C. $= \frac{x}{20}$

und die fünfjährigen Zinsen . . . . $= \frac{x}{4}$

Daher nach der Aufgabe

$$x + \frac{x}{4} = 2000$$
$$\frac{5x}{4} = 2000$$
$$x = \frac{2000 \times 4}{5} = 1600.$$

Allgemeine Auflösung.

Wenn ein Capital x zu p Procent verliehen, und man erhält nach m Jahren das Capital und die m jährigen Interessen $= A$ zurück; so ist

$$x + \frac{mpx}{100} = A.$$

$$\text{und} \quad x = \frac{A}{1 + \frac{mp}{100}} = \frac{100A}{100 + mp}$$

53.

Wenn das Capital . . . . $= x$

und die einjährigen Zinsen zu 4 p. C. . . . . $= \frac{x}{25}$

Also die 20jährigen Zinsen . . . . . $= \frac{x}{25} \times 20 = \frac{4x}{5}$

so ist $x + \frac{4x}{5} = 500$

$$\frac{9x}{5} = 500$$
$$x = \frac{500 \times 5}{9} = 277\tfrac{7}{9} \text{ Thlr.}$$

Auch ist diese Aufg. unter der allgemeinen von 52 begriffen.

53 a.

100 Thaler geben in 20 Jahren zu $3\frac{1}{2}$ p. C. einfache Zinsen $20 \times 3\frac{1}{2} = 70$ Thaler, folglich wächst ein Capital von Hundert Thaler in 20 Jahren zu 170 Thlr. an; man hat also die Proportion

$$100 : 270 = 170 : x \quad \text{folglich}$$

$$x = \frac{170 \times 270}{100} = 17 \times 27 = 459 \text{ Thlr.}$$

54.

Die Zinsen von den 600 Thaler sind $726 - 600 = 126$ Thaler, aber 600 Thaler müssen 1 Jahr stehen, um 18 Thaler Zinsen zu tragen; folglich hat man die Proportion $18 : 126 = 1 : x$ Jahren,

daher $x = \frac{126}{18} = 7$ Jahre.

55.

$747\frac{1}{2} - 500 = 247\frac{1}{2}$ sind die 9jährigen Zinsen von 500 Thaler, also $\frac{247\frac{1}{2}}{5} = 49\frac{1}{2}$ Thaler die 9jährigen Zinsen von 100 Thaler. Dies giebt die Proportion

$$9 : 1 = 49\frac{1}{2} : x$$

$$\text{folglich} \quad x = \frac{49\frac{1}{2}}{9} = 5\frac{1}{2}.$$

55 a.

100 Thaler thun in n Jahren zu p p.C. np Thaler Zinsen, also wächst dieses Capital in n Jahren zu $100 + np$ an, daher auch umgekehrt, um nach n Jahren $100 + np$ an Capital und einfachen Zinsen zu erhalten, muß das ur-

sprüngliche Capital 100 Thaler seyn. Soll nun ein Capital K nach n Jahren zu v anwachsen, so hat man folgende Proportion $100 + np : v = 100 : K$

$$\text{folglich} \quad K = \frac{100\,v}{100 + np}$$

56.

Das, was ich habe, sey . . . . $= x$

$$\text{Daher} \quad 3\frac{1}{2}x = x + 375$$

$$2\frac{1}{2}x = 375$$

$$\frac{5x}{2} = 375$$

$$x = \frac{375 \times 2}{5} = 150$$

Allgemeine Auflösung.

$$\text{Wenn} \quad \left\{G + \frac{z}{n}\right\} x = x + N \quad \text{so ist}$$

$$\left\{\frac{Gn + z}{n}\right\} x = x + N$$

$$(Gn + z)\, x = xn + Nn$$

$$(Gn + z)\, x - nx = Nn$$

$$(Gn + z - n)\, x = Nn$$

$$x = \frac{Nn}{Gn + z - n}$$

$$= \frac{Nn}{(G - 1)\,n + z}$$

57.

Wenn die ganze Summe des Geldes . . . . $= x$

so ist nach der Aufg. im Beutel A . . . . $= \frac{x}{4}$

im Beutel B . . . . $= \frac{3x}{8}$

im Beutel C das übrige . . $= y$

das was in den beiden erstern Beuteln befindlich ist $= 100.$

Daher 1, $100 + y = x$

und 2, $\frac{x}{4} + \frac{3x}{8} = 100$

$$\frac{5x}{8} = 100$$

$$x = \frac{100 \times 8}{5} = 160$$

Diesen Werth von x in 1 gesetzt, giebt

$100 + y = 160$ daher

$y = 60.$

Im Beutel A war also 40
» » B » » 60
» » C » » 60.

58.

Die Anzahl der Jahre des heirathslustigen Mädchens sey . . . . $= x$

so ist nach der Aufg. $9\frac{3}{4}x - 12 = 300$

$$9\tfrac{3}{4}x = 312$$

$$\frac{39x}{4} = 312$$

$$x = \frac{312 \times 4}{39} = 32.$$

Allgemeine Auflösung.

Wenn $\left\{G + \frac{z}{n}\right\} x - N = D$ so ist

$$\left\{G + \frac{z}{n}\right\} x = D + N$$

$$x = \frac{D + N}{G + \frac{z}{n}}$$

$$= \frac{D + N}{(Gn + z) : n}$$

$$= \frac{(D + N)\, n}{Gn + z}$$

59.

Wenn sie an der Mauer x Tage arbeiten; so hat
A $30x$ Cubikfuß
B $33\frac{1}{3}x$ Cubikfuß gearbeitet.
Also beide $63\frac{1}{3}x = 1000$ gemacht.

Daher $x = \frac{1000}{63\frac{1}{3}} = 15\frac{15}{19}$ also

$30x = 473\frac{13}{19}$, $33\frac{1}{3}x = 526\frac{6}{19}$.

60.

Wenn das auf die Post zu verschickende Capital $= C$
Das Postgeld zu p. pro Cent . . . . $= x.$
So ist das, was nach der Aufgabe baar verschickt wird . . . . $= C - x = B.$

Daher $100 : p = (C - x) : \frac{p\,(C - x)}{100}$

Daher $\frac{p\,(C - x)}{100} = x.$

Also $x = \frac{pC}{100 + p}$

Folglich $B = \frac{100\,C}{100 + p}$

In dem gegebenen Fall ist $C = 1202$ Thlr.; $p = \frac{1}{6}$ Thlr.

Daher $B = 1200$.

61.

Hätte er ihm 99 Thaler zu schicken, so müßte er ihm 100 übersenden. Dies giebt die Proportion

$99 : 1100 = 100 : x$ folglich

$$x = \frac{100 \times 1100}{99} = 1111 \text{ Thaler } 4 \text{ Mgr.}$$

61 a.

Von $100 + p$ muß p abgezogen werden. Man hat also die Proportion $100 + p : C = p : P$

folglich $P = \frac{pC}{100 + p}$.

Er muß also baar einsenden

$$C - P = C - \frac{pC}{100 + p} = \frac{100\,C}{100 + p}$$

Ist aber der Absender das Porto zu bezahlen schuldig, das nicht am Orte der Absendung bezahlt werden kann, so hat man die Proportion $100 - p : C = p : P$

folglich $P = \frac{pC}{100 - p}$.

Er muß ihm also zuschicken

$$B = C + \frac{pC}{100 - p} = \frac{100\,C}{100 - p}$$

Er kauft x Ochsen. Nach der Aufgabe giebt $\frac{1}{2}x$ auf die Weide

$\frac{1}{3}x$ in die Futterung und

$\frac{1}{12}x$ zum Schlachten, verkauft also

$\frac{1}{12}x$ um $\frac{x^2}{144}$ Thlr.

Daher $\frac{x^2}{144} = x$.

Folglich $x = 144$.

63.

Wenn der Preis des Pferdes in Thlrn. . . . . $= x$

das, was A mit seinem Gelde bezahlen konnte $= \frac{x}{7}$

das, was B mit seinem Gelde bezahlen konnte $= \frac{x}{9}$

das, was beide bei sich hatten . . . . $= 32$ Thlr.

So ist nach der Aufgabe $\frac{x}{7} + \frac{x}{9} = 32$

$$\frac{16\,x}{63} = 32.$$

$$x = \tfrac{32}{16} \times 63 = 126 \text{ Thlr.}$$

A hatte also bei sich $\frac{x}{7} = 18$ Thlr.

B » » » » $\frac{x}{9} = 14$ »

Allgemeine Auflösung.

Wenn der Preis des Pferdes . . . . $= x$

A konnte mit seinem Gelde bezahlen . . . . . . $= \frac{mx}{M}$

B » » » » » . . . . . . $= \frac{nx}{N}$

Was beide bei sich hatten . . . . $= C$

$$\text{so ist} \quad \frac{mx}{M} + \frac{nx}{N} = C$$

$$\frac{mNx + nMx}{MN} = C$$

$$mNx + nMx = CMN$$

$$(mN + nM)\,x = CMN$$

$$x = \frac{CMN}{mN + nM}$$

63 a.

Die Auflösung findet sich im Exempelbuche selbst.

64.

Nach der Aufgabe trinkt

A in einer Stunde $\frac{15}{30}$ Stübchen, also $\frac{15}{30}x = \frac{1}{2}x$ in x Stunden.

B » » » $\frac{15}{20}$ » » $\frac{15}{20}x = \frac{3}{4}x$ » x »

C » » » $\frac{15}{12}$ » » $\frac{15}{12}x = \frac{5}{4}x$ » x »

$$\text{Daher} \quad \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{5}{4}x = 15.$$

$$\text{Also} \quad x = 6.$$

65.

Die Anzahl der Ellen des Stücks sey . . . . $= x$

und es sey nach der Aufgabe davon verkauft $= \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x$

Das nach dem Verkauf übrig gebliebene . . . $= 20$ Ellen.

$$\text{So ist} \quad x - (\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{3}x) = 20$$

$$x - \frac{7x}{12} = 20$$

$$\frac{5x}{12} = 20$$

$$x = \frac{20 \times 12}{5} = 48.$$

Allgemeine Auflösung.

Die Anzahl der Ellen des Stücks sey . . . $= x$

Das davon verkaufte . . . . $= \frac{Ax}{a} + \frac{Bx}{b}$

Das nach dem Verkauf übrig gebliebene $= R.$

$$\text{So ist} \quad x - \left\{\frac{Ax}{a} + \frac{Bx}{b}\right\} = R$$

$$x - \left\{\frac{Abx + Bax}{ab}\right\} = R$$

$$abx - Abx - Bax = abR$$

$$(ab - Ab - Ba)\,x = abR$$

$$x = \frac{abR}{ab - Ab - Ba}$$

66.

Wenn die Zeche in Thlrn. . . . . $= x$

so hatte A nach der Aufgabe bei sich . . . . . $= \frac{x}{3}$

und B » » » » » . . . . . $= 2x$

das, was beiden nach der Bezahlung übrig blieb $= 40$ Thlr.

Daher $\left\{\frac{x}{3} + 2x\right\} - x = 40$

$$\frac{7x}{3} - x = 40$$

$$\frac{4x}{3} = 40$$

$$x = \frac{40 \times 3}{4} = 30.$$

A hatte bei sich $\frac{x}{3} = 10$

B » » » $2x = 60.$

67.

Das Vermögen in Thlrn. sey . . . . $= x$

Das verspielte ist nach der Aufgabe

$$= \frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = \frac{47x}{60}$$

übrig behält er 32 Gr. 4 Pf. $= \frac{65}{72}$

daher $x - \frac{47x}{60} = \frac{65}{72}$

$$\frac{13x}{60} = \frac{65}{72}$$

$x = \frac{65}{72} \times \frac{60}{13} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$ Thlr.

68.

Es sey die Anzahl der Nonnen . . . . $= x$

so ist nach der Aufg. $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 13 = 50$

$$3\frac{1}{12}x = 37$$

$$\frac{37x}{12} = 37$$

$$x = \frac{37 \times 12}{37} = 12.$$

69.

Wenn der Sohn x Jahre alt ist; so ist nach der Aufgabe

$$x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{4x}{5} + \frac{5x}{6} + 9 = 100$$

$$4\frac{1}{20}x = 91$$

$$\frac{91x}{20} = 91$$

$$x = \frac{91 \times 20}{91} = 20.$$

70.

War die Anzahl seiner Nüsse $= x$; so war nach der Aufg.

$$\left(x + \frac{x}{2} + \frac{x}{5} + \frac{x}{10}\right) - \left(3\tfrac{1}{2} \times 2\tfrac{6}{7}\right) = 80$$

$$\frac{18x}{10} - \left(\tfrac{7}{2} \times \tfrac{20}{7}\right) = 80$$

$$\frac{9x}{5} - 10 = 80$$

$$x = \frac{90 \times 5}{9} = 50$$

und $\frac{x}{5} = 10.$

71.

Wenn der größere Theil . . . . $= x$

so ist der kleinere . . . . $= 90 - x.$

Daher nach der Aufgabe $\frac{x}{2} + 2\,(90 - x) = 90$

$$\frac{x}{2} + 180 - 2x = 90$$

$$x + 180 = 4x$$
$$3x = 180$$
$$x = 60$$
$$90 - x = 30.$$

Allgemeine Auflösung.

Es sey die Zahl $= M$, der größere Theil $= x$; so ist der kleinere $n = M - x$.

Daher $\frac{x}{n} + n(M - x) = M$

$$x + n^2M - n^2x = nM$$
$$x(n^2 - 1) = n^2M - nM = nM(n-1)$$
$$x = \frac{nM(n-1)}{n^2 - 1}$$
$$= \frac{nM}{n+1}$$

also $M - x = \frac{M}{n+1}$

72.

Wenn das Vermögen . . . . $= x$

so soll nach der Aufgabe die Wittwe erhalten . . . $= \frac{x}{2}$

er Bruder . . . . $= \frac{x}{3}$

die Kirche das Uebrige . . . . $= 100.$

Daher $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 100 = x$

$$\frac{5x}{6} + 100 = x$$

$100 = \frac{x}{6}$ also

$$x = 600$$

73.

Die Anzahl der Personen der Gesellschaft . . . . . . $= x$

so ist nach der Aufgabe die Anzahl der Theologen . . $= \frac{x}{2}$

» » » Juristen . . . $= \frac{x}{5}$

» » » Damen . . . $= 15.$

Daher denn $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + 15 = x$

$$\frac{7x}{10} + 15 = x$$
$$15 = \frac{3x}{10}$$

Folglich $x = \frac{15 \times 10}{3} = 50$

Woraus die Anzahl der Theologen, Juristen und Damen bestimmt wird.

74.

Er hatte x Thlr. Nach der Aufgabe ist das verspielte Geld

$$= \frac{x}{3} + \frac{x}{5}.$$

Dieses und die ihm nachher übrig bleibenden 14 Thlr. machen sein Geld. Daher

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 14 = x$$

$$\frac{8x}{15} + 14 = x \quad \text{also}$$

$$14 = \frac{7x}{15} \quad \text{und}$$

$$x = \tfrac{14}{7} \times 15 = 30.$$

75.

Die Größe des Commando sey . . . . $= x$

Davon nach der Aufgabe gefangen . . . . $= \frac{x}{2}$

» » » » geblieben . . . . $= \frac{x}{4}$

» » » » hart verwundet . . . . . $= \frac{x}{7}$

der Ueberrest . . . . $= 3$

$$\text{Daher} \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x$$

$$\frac{25x}{28} + 3 = x$$

$$3 = \frac{3x}{28}$$

$$\text{Folglich ist} \quad x = \frac{3 \times 28}{3} = 28$$

woraus die Gefangenen, Gebliebenen und Verwundeten bestimmt werden.

76.

Wenn sein Alter x Jahre; so ist nach der Aufgabe

sein in der Kindheit verlebtes Alter . . . . $= \frac{x}{5}$

» » » Jugend . . . . $= \frac{x}{8}$

» in den männlichen Jahren verlebtes Alter . . $= \frac{x}{2}$

Als Greis lebte er schon 14 Jahre.

$$\text{Daher} \quad \frac{x}{5} + \frac{x}{8} + \frac{x}{2} + 14 = x$$

$$\frac{33x}{40} + 14 = x$$

$$14 = \frac{7x}{40} \quad \text{und}$$

$$x = \frac{14 \times 40}{7} = 80.$$

77.

Wenn die Verlassenschaft x

so soll nach der Aufgabe A erhalten . . . $\frac{x}{2} - 1000$

B » . . . $\frac{x}{3} - 800$

C » . . . $\frac{x}{4} - 600$

Daher $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 2400 = x$

$$\frac{13x}{12} - 2400 = x$$

$$\frac{x}{12} - 2400 = 0$$

$$x = 2400 \times 12 = 28800.$$

Es erhält also A $\frac{x}{2} - 1000 = 13400$

B $\frac{x}{3} - 800 = 8800$

C $\frac{x}{4} - 600 = 6600$

Summe $= 28800$

78.

Die Säule sey x Fuß hoch, so ist nach der Aufgabe

$$5\tfrac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7} = x$$

Daher $5\frac{1}{2} + \frac{59x}{70} = x$

$$\frac{11}{2} = \frac{11x}{70}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{70}$$

$$x = \frac{70}{2} = 35.$$

79.

Die Anzahl der angelegten Thaler sey .... $= x$

und nach der Aufg. das für den Zucker bestimmte $= \frac{x}{4}$

» » » » Caffe » $= \frac{x}{3}$

» » » » Reiß » $= \frac{x}{12}$

» » » » Thee » $= \frac{x}{6}$

» » » die Mandeln » $= 7\frac{1}{2}$ Thlr.

so ist $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}x + 7\frac{1}{2} = x$

$$\frac{5x}{6} + 7\tfrac{1}{2} = x$$

$$7\tfrac{1}{2} = \tfrac{x}{6}$$

Daher $x = 7\frac{1}{2} \times 6 = 45.$

Es kostet also der Zucker $\frac{x}{4} = 11\frac{1}{4}$ Thlr.

der Caffe $\frac{x}{3} = 15$ »

der Reis $\frac{x}{12} = 3\frac{3}{4}$ »

der Thee $\frac{x}{6} = 7\frac{1}{2}$ »

die Mandeln kosten $= 7\frac{1}{2}$ »

Summe 45 Thlr.

80.

Die Glokke hat gethan x Schläge. Daher nach der Aufgabe

$$\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{3} + \tfrac{x}{4} = x + 1$$

$$\frac{13x}{12} = x + 1$$

$$\tfrac{x}{12} = 1$$

$$x = 12.$$

81.

Ich hatte x Thaler. Nach der Aufgabe betrugen die Geschenke $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$. Hätte ich noch 8 Thaler, so würde ich diese Geschenke machen können.

Daher $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 8$

$$\frac{13x}{12} = x + 8$$

$$\frac{x}{12} = 8$$

$$x = 8 \times 12 = 96.$$

82.

Versponnen werden x Pfund Flachs.

Die große Magd spinnt täglich .... $\frac{x}{36}$

» kleine » » » .... $\frac{x}{48}$

» Frau » » .... $\frac{x}{48} + \frac{1}{8}$.

Alle drei verspinnen täglich

$$\frac{x}{36} + \frac{x}{48} + \frac{x}{48} + \frac{1}{8} = \frac{5x}{72} + \frac{1}{8}.$$

Daher in 8 Tagen $\left\{\frac{5x}{72} + \frac{1}{8}\right\} \times 8 = x$

$$\frac{40x}{72} + 1 = x = \frac{5x}{9} + 1.$$

Also $\frac{4x}{9} = 1$

$$x = \tfrac{9}{4} = 2\tfrac{1}{4}.$$

83.

Der Bauer hatte ..... x Aepfel.

Davon gingen ab .... $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

und blieben daher ... $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

Davon gingen ferner ab . $\frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$.

Blieben also... $\frac{x}{4} - \frac{3}{4}$.

Davon gingen endlich ab $\frac{x}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$.

Blieben endlich . $\frac{x}{8} - \frac{7}{8} = x - 14$ nach der Aufg.

Daher $x - 7 = 8x - 112$

$$105 = 7x$$

$$x = 15.$$

84.

Wenn das ausgesetzte Capital x, so bekommt die Kirche $= \frac{x}{5}$ und es bleibt $\frac{4x}{5}$;

$\frac{1}{3}$ davon bekommt das Armenhaus $= \frac{4x}{15}$ und es bleibt $\frac{8x}{15}$;

$\frac{1}{5}$ davon bekommt der Rektor $= \frac{8x}{75}$ und es bleibt $\frac{32x}{75}$;

$\frac{1}{8}$ davon bekommt der Conrektor $= \frac{4x}{75}$ u. es bl. 5936 Tlr.

Daher

$$\frac{x}{5}+\frac{4x}{15}+\frac{8x}{75}+\frac{4x}{75}+5936=x$$

$$\frac{47x}{75}+5936=x$$

$$5936=\frac{28x}{75}$$

$$x=\frac{5936\times 75}{28}=15900$$

Von den übrig gebliebenen 5936 Thlrn. bekommt
der erste Schulcollege y
der andere » $y-30$. Daher
der neunte » $y-(8\times 30)=y-240$.

Der erste und letztere bekommen daher $2y-240$
und alle bekommen $(2y-240)\frac{9}{2}=5936$.

Daher $9y-1080=5936$

$$9y=7016$$

$$y=779\tfrac{5}{9}.$$

Die Kirche bekam daher . . . . $\frac{x}{5}=3180$.

Das Armenhaus. . . . . $\frac{4x}{15}=4240$.

Der Rektor . . . . $\frac{8x}{75}=1696$.

Der Conrektor . . . . $\frac{4x}{75}=848$.

Der erste Schulcollege . . . . . $y=779\frac{5}{9}$.
Der zweite » . . . . . $y-30=749\frac{5}{9}$.
Der dritte » . . . . . $y-60=719\frac{5}{9}$.
Der vierte » . . . . . $y-90=689\frac{5}{9}$ u.s.w.

85.

Die von den beiden Schäfern A und B gezählte Heerde Schaafe enthielt x Stück. Nach der Aufgabe war die

Heerde des A . . . . $=\frac{x}{3}$

die Heerde des B . . . . $=\frac{x}{4}$

Nach der Versicherung des A hatte er 17 mehr als B.

Daher $\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+17$

$$\frac{4x}{12}=\frac{3x}{12}+17$$

$$\frac{x}{12}=17$$

$$x=17\times 12=204.$$

86.

Das Vermögen sey . . . . $=x$

also nach der Aufg. der Verlust durch die erste Wette $=\frac{x}{3}$

» » » » zweite » $=\frac{x}{4}$

Gewinne » » dritte » $=\frac{x}{8}$

Ganzer Verlust in Gr. . . . . $=11$

Hätte er noch 11 Gr. mehr gewonnen, so wäre der Verlust dem Gewinne gleich.

Daher $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{x}{8} + 11$

$$\frac{14x}{24} = \frac{3x}{24} + 11$$

$$\frac{11x}{24} = 11$$

Folglich ist $x = 24$

87.

Das Faß A enthalte . . . . x Ohm.

Sollen im Faße A $\frac{2}{3}x$ bleiben, wenn daraus B gefüllt wird; so muß das Faß B enthalten . $\frac{x}{3}$

Sollen im Faße A $\frac{5x}{9}$ bleiben, wenn daraus C gefüllt wird; so muß das Faß C enthalten . $\frac{4x}{9}$

Daher nach der Aufgabe

$$x - 8 = \frac{x}{3} + \frac{4x}{9} = \frac{7x}{9}$$

also $\frac{2x}{9} = 8$ und

$$x = \frac{9 \times 8}{2} = 36.$$

88.

Wenn dies in x Stunden geschieht; so hat nach der Aufgabe der Bote A beim Punkt des Einholens $\frac{1}{2}x + 5$ Meilen zurückgelegt; der Bote B aber . . . $\frac{3x}{4}$ Meilen.

Beide haben aber beim Punkt des Einholens einerlei Zahl Meilen zurückgelegt. Daher

$$\tfrac{1}{2}x + 5 = \tfrac{3}{4}x$$

$$x = 20$$

89.

Der Knabe hatte . . . . x Nüsse.

Davon gingen ab . . . . $\frac{x}{2} + 3.$

Blieben daher . . . . $\frac{x}{2} - 3.$

Davon gingen ferner ab . . . . . . $\frac{x}{4} - \frac{3}{2} + 4.$

Blieben daher nach der Aufgabe . . $\frac{x}{4} + \frac{3}{2} - 7 = \frac{x}{6}$

und $\frac{3x}{12} - \frac{11}{2} = \frac{2x}{12}$

also $x = 66.$

90.

Er hat . . . . x Zitronen.

Schenkt dem Magistrat $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

Behält . . . $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3x}{6} - \frac{3}{6}.$

Schenkt dem Vater $\frac{x}{6} + \frac{1}{6}$

und behält . $\frac{2x}{6} - \frac{4}{6} = \frac{4x}{12} - \frac{8}{12}.$

Schenkt der Mutter $\frac{x}{12} + \frac{1}{12}$

und behält $\frac{3x}{12} - \frac{9}{12} = \frac{x}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5x}{20} - \frac{15}{20}$.

Schenkt dem Bruder $\frac{x}{20} + \frac{1}{20}$

und behält $\frac{4x}{20} - \frac{16}{20} = \frac{x}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6x}{30} - \frac{24}{30}$.

Schenkt der Schwester $\frac{x}{30} + \frac{1}{30}$

und behält $\frac{5x}{30} + \frac{25}{30} = \frac{x}{6} - \frac{5}{6} = \frac{7x}{42} - \frac{35}{42}$.

Schenkt einem Freunde $\frac{x}{42} + \frac{7}{42}$

und behält $\frac{6x}{42} - \frac{42}{42} = \frac{x}{7} - 1 = 16$ nach der Aufg.

Daher $x = 17 \times 7 = 119$.

Der Magistrat bekommt also 60; der Vater 20; die Mutter 10; der Bruder 6; die Schwester 4; der Freund 3; die Armen 16.

91.

Die Jungfer sey x Jahre alt, so ist nach der Aufgabe, da Methusalems Alter 969 Jahre,

$$\left(\frac{2x}{3} + \frac{5x}{6} + \frac{8x}{9}\right) \times 8 - 63 = 969$$

$$\frac{43x}{18} \times 8 = 1032$$

$$x = \frac{1032 \times 18}{43 \times 8}$$

$$= 54.$$

92.

Wenn die Aussaat x Himten, so ist nach der Aufgabe die Ernte $15x + 7$,

daher $\frac{15x + 7}{2} = 306$

$$15x + 7 = 612$$

$$x = \frac{612 - 7}{15} = 40\tfrac{1}{3}.$$

93.

Des Rechnenmeisters Geldvorrath in Thlrn. sey $= x$

so ist nach der Aufgabe $\frac{3x + 15}{6} + 6 = x$

also $3x + 15 = (x - 6) \times 6 = 6x - 36$

$$51 = 3x$$

$$x = 51 : 3 = 17.$$

Allgemeine Auflösung.

Es sey $\frac{cx + n}{d} + m = x$ so ist

$cx + n + md = dx$ und

$$dx - cx = n + md$$

$(d - c)\, x = n + md$ also

$$x = \frac{n + md}{d - c}$$

94.

Ein Bauer geht zur Stadt mit . . . . x Eiern.

Nachdem ihm in einem Wirthshause 10 Stück gestohlen worden, behält er . . . . $x - 10$

Nach einem Fall bleiben ganz ...... $\frac{x-10}{5}+2$

Aus einem unterwegens gefundenen Korbe legt er

53 St. zu seinem Vorrath, und hat also $\frac{x-10}{5}+55$

In der Stadt findet er, daß ihm an seinen Eiern 11 fehlen.

Daher $\frac{x-10}{5}+55=x-11.$

$$\frac{x-10}{5}+66=x$$
$$x-10+330=5x$$
$$320=4x$$

$80=x$. Er hatte also

nach dem Diebstahl $x-10=70$

» » Fall $\frac{x-10}{5}+2=16$

» » Fund $\frac{x-10}{5}+55=69=x-11.$

Es fehlten ihm also an seiner anfänglichen Anzahl von Eiern 11, weil er deren 80 hatte.

95.

Der Gärtner hatte x Aepfel; verschenkte davon $\frac{x}{m}-a$

dem ersten Freunde, behielt also

$$x-\left\{\frac{x}{m}-a\right\}=\frac{mx-x+am}{m};$$

verschenkte davon

$$\left\{\frac{mx-x+am}{m}:m\right\}-a=\frac{mx-x+am-am^2}{m^2}$$

dem zweiten Freunde, behielt also

$$\frac{m^2x-2mx+x+2am^2-am}{m^2};$$

verschenkte davon

$$\left\{\frac{m^2x-2mx+x+2am^2-am}{m^2}:m\right\}-a$$

dem dritten Freunde

$$=\frac{m^2x-2mx+x+2am^2-am-am^3}{m^3}$$

behielt also

$$\frac{m^3x-3m^2x+3mx+3am^3-3am^2-x+am}{m^3}$$

$=\frac{x}{n}$ nach der Aufgabe.

Daher $x=\frac{[(3\times(m-1)\times m)+1]\,anm}{(m-1)(3nm)+n+(1-n)m^3}$

Da nun nach der Aufgabe $m=3$; $a=11$; $n=2$; so ist $x=114$.

96.

Von der einen Sorte, z. B. von Ggr. x Stück; und also von den vier Ggr. Stück $15-x$ Stück.

Daher $\frac{x}{24}+\frac{15-x}{6}=2$

$$x+60-4x=24$$
$$36=3x$$

$x=12=$ der Anzahl der Ggr.

$15-x=3=$ der Anzahl der 4 Ggr. Stücke.

97.

Von den 10teln eines Thlrs. x Stück, und also von den 20teln 17 — x Stück. Daher nach der Aufgabe

$$\frac{x}{10} + \frac{17-x}{20} = 1$$

$$2x + 17 - x = 20$$

$$x = 3$$

$$17 - x = 14$$

97 a.

Was er von dem 14löthigen nimmt, sey x Mark, so ist das, was er von dem 11löthigen nehmem muß 8—x Mk. Da nun vom erstern jede Mark 14 Loth fein Silber enthält, so enthalten x Mark 14x Loth, und weil von der zweiten Sorte jede Mark 11 Loth fein Silber enthält, so enthalten 8—x Mark 11 (8—x) = 88 — 11x Loth. Nach der Aufgabe soll aber die Mischung 8 × 12 = 96 Loth fein Silber enthalten; es ist daher

$$14x + 88 - 11x = 96 \quad \text{oder}$$

$$3x + 88 = 96$$

$$3x = 96 - 88 = 8$$

$$x = \tfrac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3};\ 8 - x = 5\tfrac{1}{3}.$$

97 b.

Nimmt er von der besseren Sorte x, so muß er von der geringern 1 — x Stübchen nehmen. Nun kostet von der ersten das Stübchen 24 Ggr., also kosten x Stübchen 24x Ggr.; von der zweiten kostet aber das Stübchen 15 Ggr., also kosten

1 — x Stübchen (1 — x) 15 = 15 — 15x Ggr.

Nach der Aufgabe soll das Stübchen der Mischung 18 Ggr. kosten

daher ist $24x + 15 - 15x = 18$ oder

$$9x + 15 = 18$$

$$9x = 18 - 15 = 3$$

folglich $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$1 - x = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}$$

97 c.

Nimmt er zu jedem Scheffel dieser Mischung x Scheffel Rocken, so ist der Gersten 1 — x. Da nun 1 Scheffel Rocken 2 Thaler kostet, so kosten x Scheffel 2x Thlr.; der Scheffel Gersten kostet aber $\frac{5}{4}$ Thaler, folglich 1 — x Scheffel (1 — x) $\frac{5}{4}$. Nun muß nach der Aufgabe

$$2x + (1-x)\tfrac{5}{4} = \tfrac{3}{2}$$

daher $8x + (1-x)\,5 = 6$ daher

$$8x + 5 - 5x = 6 \quad \text{also}$$

$$8x - 5x = 6 - 5 \quad \text{oder}$$

$$3x = 1 \quad \text{folglich}$$

$x = \frac{1}{3}$. Daher $1 - x = \frac{2}{3}$.

98.

Er hatte anfänglich . . . . x Pistolen

nach dem ersten Jahr

$$x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$$

nach dem zweiten Jahr

$$\left\{\frac{4x-400}{3} - 100\right\} + \left(\frac{4x-700}{3}\right) : 3$$

$$= \frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$$

nach dem dritten Jahr

$$\left\{\frac{16x-2800}{9}-100\right\}+\left\{\frac{16x-2800}{9}-100:3\right\}$$

$$=\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$$

Daher $\frac{64x-14800}{27}=2x$

$$64x-14800=54x$$

$$x=1480 \text{ Pistolen}$$

$$=7400 \text{ Thlr.}$$

99.

Das Vermögen in Thlrn. sey . . . . $= x.$

Gehn von demselben 100 Thlr. ab; so bleiben $x-100$

dessen Zehntel . . . . $\frac{x-100}{10}$

Daher bekömmt das erste Kind

$$100+\frac{x-100}{10}=\frac{1000+x-100}{10}=\frac{900+x}{10}$$

und es bleibt das übrige Vermögen $= x-\left\{\frac{900+x}{10}\right\}$

$$=\frac{10x-900-x}{10}$$

$$=\frac{9x-900}{10}$$

Davon bekömmt das zweite Kind fürs erste 200 Thlr.

Daher bleibt das Vermögen $=\frac{9x-900}{10}-200$

$$=\frac{9x-900-2000}{10}$$

$$=\frac{9x-2900}{10}$$

wovon das zweite Kind noch ein Zehntel, also

$\frac{9x-2900}{10}:10$ bekömmt,

welches $=\frac{9x-2900.}{100}$

Das zweite Kind bekommt daher mit jenen 200 Thlr.

$$200+\frac{9x-2900}{200}=\frac{20000+9x-2900}{100}$$

$$=\frac{17100+9x.}{100}$$

Da nun die Kinder zu gleichen Theilen gehn; so ist

$$\frac{17100+9x}{100}=\frac{900+x}{10}=\frac{9000+10x}{100}$$

also $9000+10x=17100+9x$

und $x=8100$ das Vermögen.

Das älteste Kind bekommt $\frac{900+x}{10}=\frac{900+8100}{10}$

$$=900$$

und das bekommt jedes. Daher $\frac{8100}{900}=9$ die Anzahl der Kinder.

Allgemeine Auflösung.

Das Vermögen sey $= x$. Gehn von demselben P ab; so bleiben $x-P$ dessen mtel $\frac{x-P.}{m}$

Daher bekommt das erste Kind

$$P + \frac{x - P}{m} = \frac{mP + x - P.}{m}$$

Bleibt das Vermögen

$$x - \frac{mP + x - P}{m} = \frac{mx - mP - x + P.}{m}$$

Davon geht fürs erste, für das zweite Kind Q ab und es bleibt

$$\frac{mx - mPx + P}{m} - Q = \frac{mx - mP - x + P - mQ}{m}$$

dessen mtel $= \frac{mx - mP - x + P - mQ.}{m^2}$

Das zweite Kind bekommt daher

$$Q + \frac{mx - mP - x + P - mQ}{m^2}$$

$$= \frac{m^2 Q + mx - mP - x + P - mQ.}{m^2}$$

Daher

$$\frac{mP + x - P}{m} = \frac{m^2 Q + mx - mP - x + P - mQ}{m^2}$$

und

$$m^2 P + mx - mP = m^2 Q + mx - mP - x + P - mQ$$

$$m^2 P = m^2 Q - x + P - mQ.$$

$$x = m^2 Q + P - mQ - m^2 P$$

$$= m^2 (Q - P) + P - mQ.$$

Wendet man diese allgemeine Formel auf jenes Beispiel an, so ist $P = 100$; $Q = 200$; $m = 10$.

Daher $x = 100 (200 - 100) + 100 - (10 \times 200)$

$= 8100$ wie zuvor.

Da jeder Theilnehmer gleich viel bekommt, und der Theil des erstern $= \frac{mP + x - P}{m}$; so kommt der Theil eines jeden, wenn man für x den Werth setzt.

Der Theil eines jeden ist daher

$$= \frac{mP + m^2 (Q - P) + P - mQ - P}{m}$$

$$= P + m (Q - P) - Q$$

und in vorliegender Aufgabe

$$= 100 + 10 (200 - 100) - 200$$

$$= 900 \text{ wie zuvor.}$$

Setzt man $Q - P = A$; so ist der Theil eines jeden $= mA - A = (m - 1) A = (m - 1) (Q - P)$ und die Anzahl der Theilnehmer

$$= \frac{x}{(m - 1) A}$$

$$= \frac{m^2 (Q - P) + P - mQ}{(m - 1) A}$$

$$= \frac{m^2 A + Q - A - mQ}{(m - 1) A}$$

$$= \frac{(m^2 - 1) A + (1 - m) Q}{(m - 1) A}$$

$$= \frac{(m^2 - 1) A}{(m - 1) A} + \frac{(1 - m) Q}{(m - 1) A}$$

$$= m + 1 - \frac{Q}{A}$$

$$= m + 1 - \frac{Q}{Q - P}$$

Ist $Q = 2P$ wie hier in der Aufgabe; so ist

$$x = (m^2 + 1 - 2m) P$$
$$= (m - 1)^2 P.$$

Der Theil eines jeden $= (m - 1) P.$

Die Anzahl der Theilnehmer $= m - 1.$

100.

Diese Aufgabe gehört auch zu der vorigen, und es ist

$$m = 9; \quad P = 1.$$

Daher $x = (m - 1)^2 P = 64.$

Der Theil eines jeden $= (m - 1) P = 8.$

Die Anzahl der Theilnehmer $= m - 1 = 8.$

101.

Es sey das Capital $= x$; so sind die einjährigen Zinsen desselbe zu 4 p.C. $= \frac{x}{25}$. Daher nach der Aufgabe

$$\left\{\frac{x}{5} : \frac{x}{25}\right\} + 9 = \frac{x}{25}$$

$$5 + 9 = \frac{x}{25} = 14.$$

Folglich $x = 350.$

Allgemeine Auflösung.

Wenn das Capital . . . . $= x$

Die Procente . . . . $= p.$

Die einjährigen Zinsen dieses Capitals . . . . $= z.$

so ist $100 : p = x : z.$

Daher $z = \frac{px}{100}.$

Also $\frac{x}{n} : \frac{px}{100} + A = \frac{px}{100}$ folglich

$$x = \frac{100}{p}\left(\frac{100}{np} + A\right) \text{ und } z = \frac{100}{np} + A$$

102.

Soll der diesjährige Ertrag 108 Thaler seyn, so muß der vorjährige 100 gewesen seyn. Man hat daher die Proportion $108 : 1890 = 100 : x$ folglich

$$x = \frac{100 \times 1890}{108} = 1750 \text{ Thaler.}$$

102 a.

Ist der diesjährige Ertrag $100 + p$, so muß der vom vorigen Jahre 100 gewesen seyn; man setze daher

$$100 + p : E = 100 : e,$$

folglich $e = \frac{100\,E}{100 + p}$

103.

Was verkauft wurde, sey x, so ist der Rest $40 - x$. Nach der Aufgabe ist nun $40 - x = x + 8$, daher $40 = 2x + 8$, also $2x = 40 - 8 = 32$, folglich $x = \frac{32}{2} = 16.$

103 a.

Hier hat man $C - v = v + r$, daher $2v + r = C$, also $2v = C - r$, folglich

$$v = \frac{C - r}{2}.$$

104.

Die Ausgabe sey x, so ist der Rest $54 - x$. Nach der Aufgabe ist nun $54 - x = 5x$, daher $54 = 6x$, folglich $x = \frac{54}{6} = 9.$

104 a.

Hier hat man $C - v = mv$, also $mv + v = C$ oder $v(m + 1) = C$, folglich $v = \frac{C}{m + 1}$

105.

Das Beigesteckte sey x, so blieb, nachdem 10 Thaler davon ausgegeben waren, $x - 10$ übrig. Nach der Aufgabe ist nun $x - 10 = \frac{1}{6}x$, also

$$6x - 60 = x, \text{ daher}$$
$$6x - x = 60 \text{ oder}$$
$$5x = 60$$
$$x = \tfrac{60}{5} = 12.$$

Bemerkung. Bei den Aufgaben für arithmetische und geometrische Progressionen darf man nur, um sie aufzulösen, in die bei jeder Aufgabe im Exempelbuche angezeigte Formeln die entsprechenden Zahlen setzen. Es sind daher nur die Auflösungen von 123 b. und 123 c. hier gegeben.

123 b.

Ist, wie hier angenommen wird, die Zahl, die man erreichen muß, $= 100$, und darf man nie über 12 zuaddiren, so wird gewiß derjenige zuerst 100 erreichen, der zuerst 87 erreicht; er hat also nur darauf zu sehen, daß er 87 erreiche. Diese Zahl wird er gewiß erlangen, wenn er 74 zuerst erlangt. Setzt man diese Schlüsse fort, so findet man, daß die Zahlen in einer arithmetischen Progression fortgehen, deren Differenz $= 13$ ist, also die Zahlen 9, 22, 35, 48, 61, 74, 87, 100. Die Differenz wird immer um 1 größer seyn, als die höchste Zahl, die man zuaddiren darf, also $= d + 1$ seyn, wenn die Differenz d heißt.

123 c.

Da die Anzahl aller Karten $= n$, und die der übrigen nicht in den Haufen angebrachten $= r$ ist, so muß die Anzahl der zur Bildung der Haufen gebrauchten $= n - r$ seyn. Da nun aber in jedem Haufen bis u gezählt, und h Haufen gemacht worden, so geben alle Haufen die Zahl hu; es enthält aber jeder Haufen nicht u Karten, denn die unterste ist für so viel Karten gezählt, als sie Points enthält; es muß daher von jedem u die Anzahl Points der untern Karte weniger 1 abgezogen werden, um die Anzahl Karten in jedem Haufen zu bestimmen; folglich, wenn man die Summe der Points aller untern Karten $= S$ setzt, so hat man

$$n - r = h(u + 1) - S \text{ daher}$$
$$S = h(u + 1) + r - n.$$

II.

145.

Es sey der Eimer $= E$; die Pfanne $P = 18E$.
Da nun nach der Aufgabe $P + E = 570$, so ist auch

$$19E = 570.$$

Folglich $E = 30$
und $P = 540$.

146.

Der Werth der einen Tabatiere sey . . . . $= x$
der andern » » . . . . $= y$
so ist nach der Aufgabe I, $x + 10 = 2y$
II, $x = y + 10$.

Diese Gleichung von jener abgezogen, giebt $10 = y - 10$

$$y = 20$$

$$x = 30.$$

147.

A habe x und B habe y
so ist $x + 10 = y$
und $2x = y + 15$.

Jene Gleichung von dieser abgezogen, giebt

$$x - 10 = 15$$

$$x = 25$$

$$y = 35.$$

147 a.

Hier hat man folgende zwei Gleichungen

I $A + a = mB$
II $A = B + b$.

Diese Gleichung von jener abgezogen, giebt

$$a = mB - B - b$$

$$a + b = mB - B$$

$$(m - 1)\, B = a - b$$

$$B = \frac{a + b}{m - 1}$$

$$A = B + b = \frac{a+b}{m-1} + b = \frac{a + mb}{m - 1}$$

148.

Es sey die Anzahl der Jungen . . . . $= x$
die der Mädchen . . . . $= y$
Daher die Anzahl der Brüder des ältern Sohns $= x - 1$
und die Anzahl der Schwestern der ältern Tochter $= y - 1$.

Daher $x - 1 = y$
und $x = 2\,(y - 1) = 2y - 2$.

Jene Gleichung von dieser abgezogen, giebt $1 = y - 2$
also $y = 3$ und
$x = 4$.

149.

A habe x Eier. B habe y Eier.
Erhält A von B zwei Eier; so hat jener $x + 2$, dieser $y - 2$ Eier, und es ist nach der Aufgabe

I, $x + 2 = y - 2$.

Erhält B von A zwei Eier; so hat jener $y + 2$, dieser $(x - 2)$ Eier, und es ist nach der Aufgabe

$$\text{II,}\quad 2(x-2) = y + 2.$$

Zieht man jene Gleichung von dieser ab; so entsteht

$$2(x-2) - x - 2 = 4. \quad \text{Daher}$$
$$2x - 4 - x - 2 = 4$$
$$x - 6 = 4 \quad \text{und}$$
$$x = 10.$$

Diesen Werth von x in die erste Gleichung gesetzt, giebt

$$10 + 2 = y - 2$$
$$\text{Daher}\quad y = 14.$$

Eine andere Auflösung.

Aus der ersten Gleichung folgt $x + 4 = y$
» » andern » » $2(x-2) - 2 = y$

$$\text{Daher}\quad 2(x-2) - 2 = x + 4$$
$$2x - 6 = x + 4.$$
$$\text{Also}\quad x = 10 \text{ u.s.f.}$$

Allgemeine Auflösung.

Es sey alles wie zuvor, nur gebe einer dem andern a Eier; so ist

$$\text{I,}\quad x + a = y - a$$
$$\text{II,}\quad 2(x-a) = y + a$$
$$\text{Also}\quad 2(x-a) - x - a = 2a$$
$$2x - 2a - x - a = 2a$$
$$x = 5a.$$

Diesen Werth in 1 gesetzt, giebt $6a = y - a$.

$$\text{Also}\quad y = 7a$$

Noch allgemeiner ist die Aufgabe so: A habe x und B habe y.
A sagt zu B, gieb mir c, so habe ich m mal so viel als du:
B sagt zu A, gieb mir d, so habe ich n mal so viel als du.

$$\text{Daher}\quad x + c = m(y - c) = my - mc \qquad \text{I}$$
$$\text{und}\quad y + d = n(x - d) = nx - nd \qquad \text{II}$$
$$\text{also}\quad my + md = mnx - mnd \qquad \text{III.}$$

Aus I folgt $x + c + mc = my$
Aus III » $my = mnx - mnd - md$

$$\text{Folglich}\quad mnx - mnd - md = x + c + mc$$
$$mnx - x = c + mc + mnd + md$$
$$(mn-1)x = c + mc + mnd + md$$
$$x = \frac{c + mc + mnd + md}{mn - 1}$$
$$= \frac{(1+m)c + (1+n)md}{mn - 1}$$
$$y = \frac{(1+n)d + (1+m)nc}{mn - 1}.$$

150.

Wenn die Anzahl der vorräthigen Löppe	$= x$.
die Anzahl derer, die zu einer Elle Leinwand gebraucht werden	$= y$
so ist das Erforderliche zu 100 Ellen	$= 100y$
und zu 80 Ellen	$= 80y$.

$$\text{Daher nach der Aufgabe}\quad 100y = x + 20 \qquad \text{I.}$$
$$\text{und}\quad 80y = x - 12. \qquad \text{II.}$$
$$\text{Aus I folgt}\quad 400y = 4x + 80.$$
$$\text{Aus II folgt}\quad 400y = 5x - 60.$$
$$\text{Daher}\quad 5x - 60 = 4x + 80.$$
$$\text{Also}\quad x = 140$$
$$\text{und}\quad y = \tfrac{160}{100} = 1\tfrac{3}{5}.$$

151.

Es sey der Einkaufs-Preis des Ganzen . . . . $= y$
Die Anzahl der Pfunde . . . . $= x.$

Daher $4\frac{7}{8}x = y - 2\frac{1}{2}$ A

und $5x = y + 10$ B

Zieht man von B ab A, so ist

$$\frac{x}{8} = 12\tfrac{1}{2}.$$

Folglich $x = 100$

$y = 490.$

152.

Wenn das Gewicht der Schaale x Loth und das, was sie unter den in der Aufgabe angegebenen Umständen über oder unter 100 Pfd. wiegt, y Loth; so ist

$$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + 12 = y + 100 \qquad \text{A}$$

$$\text{und} \quad x = 100 - y \qquad \text{B}$$

Aus A folgt $\frac{35x}{12} - 88 = y$

Aus B folgt $100 - x = y$

Also $\frac{35x}{12} - 88 = 100 - x$

$$x + \frac{35x}{12} = 188$$

$$\frac{47x}{12} = 188$$

$$x = \frac{188 \times 12}{47} = 48.$$

153.

Wenn das gegenwärtige Alter des Vaters $= x$ Jahre
» » » » » Sohnes $= y$ Jahre;
so war vor 7 Jahren das Alter des Vaters $= x - 7$,
und nach 7 Jahren $= x + 7$
vor 7 Jahren das Alter des Sohnes $= y - 7$,
und nach 7 Jahren $= y + 7$.

Daher $x - 7 = 3(y-7) = 3y - 21$ I.

und $x + 7 = 2(y+7) = 2y + 14.$ II.

Also $-14 = y - 35.$

Daher $y = 21.$ III.

Aus II u. III folgt $x = 49.$

154.

Es sey die Anzahl der Personen . . . . $= x$
Die Zeche in Thalern . . . . $= z$

Bezahlt nach der Aufgabe jede Person 4 Thaler, so bezahlen alle $4x$, welches die Zeche z machen würde, wenn jene Bezahlung 20 Thlr. mehr betrüge. Daher

$4x + 20 = z;$ A.

bezahlt aber jede Person 5 Thlr., so bezahlen alle $5x$; aber dazu könnten es 5 Thlr. weniger seyn, um die Zeche zu bezahlen. Daher

$5x - 5 = z$ B.

Zieht man nun A von B ab; so ist

$x - 25 = 0$

$x = 25$ und $z = 120.$

155.

Die Anzahl der Pfunde Zucker sey . . . . $= x$
» » » Groschen » . . . . $= G.$

Daher nach der Aufgabe $7x + 10 = G$
und $8x - 30 = G$
Folglich $x - 40 = 0$
$x = 40$
$G = 7x + 10 = 290.$

156.

Wenn die Anzahl der Personen . . . . $= x$
Die Anzahl der Groschen . . . . $= G$
Gab er nach der Aufgabe jeder Person 6 Gr., so fehlten ihm 12; gab er aber jeder 4 Gr., so blieben ihm 2 übrig.
Daher ist $6x - 12 = G$ und
$4x + 2 = G.$
Folglich $2x - 14 = 0$
$2x = 14$
$x = 7$
$G = 30.$

157.

Die Anzahl der Arbeiter, die A bezahlen soll, sey $= x$
Die Summe seines Geldes in Gr. . . . . $= G$
Giebt er jedem Arbeiter 9 Gr., so ist das nach der Aufgabe . . . . $= 9x$
und was ihm dann übrig bleibt, ist . . . . $= 32$ Gr.
Giebt er jedem 11 Gr., so ist dies . . . . $= 11x$
und was ihm dann fehlt, ist . . . . $= 32$ Gr.
So ist 1. $9x + 32 = G$ und
2. $11x - 32 = G.$ Daher
$9x + 32 = 11x - 32$
$32 = 2x - 32$
$64 = 2x$
$x = 32$ und
$G = (9 \times 32) + 32 \quad (1)$
$= 320.$

Eine andere Auflösung.

Durch die Addition der beiden Gleichungen 1 und 2 entsteht
$20x = 2G$
$10x = G.$ Setzt man diesen Werth von G in die erste Gleichung, so entsteht $9x + 32 = 10x$ also
$32 = x$

Eine dritte Auflösung.

Man ziehe die Gleichung 1 von 2 ab, so ist
$2x - 64 = 0$
$2x = 64$
$x = 32.$

Allgemeine Auflösung.

Es sey 1. $ax + R = G$
2. $bx - R = G$
so ist $bx - ax - 2R = 0$
$bx - ax = 2R = (b - a)\,x$
Folglich $x = \frac{2R}{b - a}$

158.

Wenn die Anzahl der Kinder . . . . $= x$
und die Anzahl der Aepfel . . . . $= A.$
Gab er nach der Aufgabe jedem Kinde 4, so behielt er 44 Stück übrig; gab er aber jedem 6, so blieben ihm nur 12.
Daher ist 1. $4x + 44 = A$
2. $6x + 12 = A$
und $2x - 32 = 0$
$2x = 32$
$x = 16$
$A = 108$

Allgemeine Auflösung.

Wenn $Bx + b = A$
und $Cx + c = A$
so ist $Cx + c - Bx - b = 0$
$Cx - Bx = b - c$
oder $x(C - B) = b - c$
$$x = \frac{b - c}{C - B}$$

159.

Es sey die Anzahl seiner Schuldner . . . . $= x$.
Das Kaufgeld des Landguts . . . . $= G$
Das, was er jedem aufkündigen muß . . . . $= G : x$.

Daher $200x - 700 = G$ A.
$150x + 1100 = G$
Also $50x - 1800 = 0$
$x = 36$; setzt man
diesen Werth für x in A, so ist $G = 6500$
$G : x = 180\frac{5}{9}$.

160.

Es sey der eine Becher $B = 12$
der andere " $= P$
der Deckel . . . $= D$.
So ist nach der Aufg. $B + D = 12 + D = 2P$
und $P + D = 36$.
Daher $12 - P = 2P - 36$
$P = 16$
$D = 20$.

161.

Liefert der Bauer x Himbten Rocken und y Himbten Gersten,
so ist nach der Aufgabe $x + y = 58$ I.
und $41x + 31y = 2198$ Matier II.
Aus I. folgt $31x + 31y = 1798$.
Daher $10x = 400$
$x = 40$
$y = 18$.

161 a.

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit m, so erhält man $mR + mG = bm$; zieht man nun von dieser dritten Gleichung die erste ab, so bleibt

$mG - nG = bm - a$
oder $G(m - n) = bm - a$
folglich $G = \frac{bm - a}{m - n}$
und $R = b - G = \frac{a - nb}{m - n}$

161 b.

Hier folgt die Auflösung von Nro 42 a, welche ebenfalls eine Aufgabe von zwei unbekannten Größen und zwei Gleichungen ist.

Da die Anzahl der Männer $= M$, die der Frauen $= F$, so blieben, nachdem g Männer und c Frauen weggegangen waren, von den Männern $M - g$,
und von den Frauen $F - c$.
Nun ist nach der Aufgabe

$$M : F = a : b \qquad \text{I.}$$
$$M - g : F - c = d : e \qquad \text{II.}$$

Aus I folgt $bM = aF$ III.

Aus II folgt $eM - eg = dF - cd$ IV.

III mit e und IV mit b multiplicirt,

giebt $beM = aeF$ V.

$$beM - beg = bdF - bcd \qquad \text{IV.}$$

Aus V und VI folgt

$$bdF - aeF = bcd - beg$$
$$(bd - ae)\, F = b\,(cd - eg)$$
$$F = \frac{b\,(cd - eg)}{bd - ae}$$

Aus III folgt $M = \frac{aF}{b}$.

Setzt man in diese Gleichung den gefundenen Werth von F,

so findet man $M = \frac{a\,(cd - eg)}{bd - ae}$

162.

Das Pfd. Rosinen koste x Ggr.; das Pfd. Pflaumen y Ggr.

So ist nach der Aufgabe $20x + 24y = 54$

$$24x + 30y = 66$$

oder $10x + 12y = 27$

$$4x + 5y = 11.$$

Diese Gleichung mit 5, jene

mit 2 multiplicirt, giebt $20x + 24y = 54$

$$20x + 25y = 55.$$

Daher $y = 1$

$$x = 1\tfrac{1}{2}.$$

162 a.

Eine Pistole werde in Münze gerechnet zu x Thaler, und ein Dukaten zu y Thaler, so ist nach der Aufgabe

$$3x = 5\tfrac{19}{73}\,y$$
$$5x = 8y + 2\tfrac{1}{3} \text{ Thaler.}$$

Diese Gleichung mit 3, jene mit 5

multiplicirt, giebt $15x = 26\tfrac{22}{73}\,y$

$$15x = 24y + 7$$

Daher $2\tfrac{22}{73}\,y - 7 = 0$

$$2\tfrac{22}{73} = 7$$
$$\tfrac{168}{73}\,y = 7$$
$$168y = 7 \times 73$$
$$24y = 73$$

also $y = \tfrac{73}{24}$ Thlr.

$y = 3$ Thlr. 1 Ggr.

Daher $3x = 16$ Thlr.

$$x = 5\tfrac{1}{3}.$$

163.

Der Maulesel habe x Centner; der Esel y Centner;

so ist I. $y + 1 = 2\,(x - 1) = 2x - 2$

II. $3\,(y - 1) = 3y - 3 = x + 1.$

Diese mit 2 multiplicirt, giebt $6y - 6 = 2x + 2.$

Die Gleichung I. von dieser abge-

zogen, giebt . . . . $5y - 7 = 4.$

Daher $y = 2\tfrac{1}{5}$

$$x = 2\tfrac{3}{5}.$$

164.

A hatte x Aepfel und B hatte y Aepfel.

A gab der Schwester $\frac{x}{5}$ behielt also $\frac{4x}{5}$.

B » » » $\frac{y}{7}$ und behielt $\frac{6y}{7}$.

Daher nach der Aufgabe I. $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 20$ und

II. $\frac{4x}{5} = \frac{6y}{7}$.

Aus I. folgt $\frac{4x}{5} + \frac{4y}{7} = 80$.

Aus II. folgt $\frac{4x}{5} - \frac{6y}{7} = 0$.

Diese Gleichung von jener abgezogen, giebt . . . . $\frac{10y}{7} = 80$.

Folglich $y = 56$

$x = 60$.

Allgemeine Auflösung.

A hatte x, gab $\frac{x}{m}$ behielt $\frac{(m-1)x}{m} = \frac{mx - x}{m}$.

B hatte y, gab $\frac{y}{n}$, behielt $\frac{(n-1)\,y}{n} = \frac{ny - y}{n}$.

Nun sey $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = P$ I.

und $\frac{(m-1)x}{m} = \frac{(n-1)\,y}{n}$ II.

Aus I. folgt $P - \frac{x}{m} = \frac{y}{n}$

und $\left\{P - \frac{x}{m}\right\} \times (n-1) = \frac{(n-1)\,y}{n}$.

Daher $\frac{(m-1)\,x}{m} = \left\{P - \frac{x}{m}\right\}(n-1)$

$$(m-1)\,x = (Pm - x)\,(n-1)$$

$$xm - x = Pmn - Pm + x - nx$$

$$xm - 2x + xn = Pmn - Pm$$

$$x = \frac{Pmn - Pm}{m+n-2}$$

$$= \frac{(n-1)\,Pm}{m+n-2}$$

$$y = \frac{(m-1)\,Pn}{m+n-2}.$$

165.

A habe x Thlr., und B habe y Thlr.

Daher I. $x + \frac{3y}{4} = 600$.

II. $y + \frac{1}{2}x = 600$. Aus II. folgt

$2y + x = 1200$.

Die erste Gleichung von dieser abgezogen, giebt

$$\frac{5y}{4} = 600$$

also $y = (600 \times 4) : 5$

$= 480$

$x = 240$.

166.

Es geschehe dieses, wenn der Hase x Sprünge gethan, so thut der Hund in eben der Zeit $\frac{7}{5}x$ Sprünge.

Nun ist $2 : 3 = \frac{7}{5}x : y$

Daher $y = \frac{21}{10}x$, welches der Weg des Hundes mit Hasensprüngen gemessen ist. Da aber der Hase 80 Sprünge voraus hat, so ist auch $x + 88 = y$.

Daher $x + 88 = \frac{21}{10}x$

$$\frac{11}{10}x = 88$$

$$x = 80$$

167.

Der Malter Rocken koste . . . . x Thlr.

Der Malter Weitzen koste . . . . y Thlr.

So ist nach der Aufgabe $2x + 8y = 64$

$$3x + 6y = 54$$

oder

$$x + 4y = 32$$

$$x + 2y = 28$$

Daher $2y = 14$

$$y = 7$$

$$x = 4.$$

168.

Es sey $\frac{z}{n}$ der Bruch, so ist nach der Aufgabe

$$\frac{z-1}{n} = \frac{1}{4} \qquad \text{I.}$$

$$\frac{z}{n-1} = \frac{1}{3} \qquad \text{II.}$$

Aus I folgt $z = \frac{n}{4} + 1 = \frac{n+4}{4}$

Aus II folgt $z = \frac{n-1}{3}$

Daher $\frac{n-1}{3} = \frac{n+4}{4}$

$$4n - 4 = 3n + 12$$

Also $n = 16$ III.

Aus I und III folgt $z = 5$

Daher $\frac{z}{n} = \frac{5}{16}$.

Allgemeine Auflösung.

Es soll ein Bruch $\frac{z}{n}$ gefunden werden, der die Eigenschaft hat, daß $\frac{z-a}{n} = \frac{c}{d}$ I.

$$\frac{z}{n-b} = \frac{e}{f} \qquad \text{II.}$$

Aus I folgt $z = \frac{nc}{d} + a = \frac{nc+ad}{d}$ III.

Aus II folgt $z = \frac{en-be}{f}$ IV.

Aus III und IV folgt $\frac{nc+ad}{d} = \frac{en-be}{f}$.

Daher $ncf + adf = end - bed$

$$end - ncf = adf + bed$$

$$n = \frac{adf+bed}{ed-cf} = \frac{(af+be)d}{ed-cf}. \qquad \text{V.}$$

Aus III und V folgt $\frac{z}{n} = \frac{(bc+ad)e}{(af+be)d}$.

Wendet man diese allgemeine Formel auf die vorhergegangene Aufgabe an; so ist $b = a = c = e = 1$

$$d = 4; \quad f = 3.$$

169.

Der Großvater hatte x Jahre; der Vater y Jahre; der Sohn z Jahre.

Es ist nach der Aufgabe	$y + z = 55$	A.
	$x + y = 109$ und	B.
	$x + z = 85$	C.
Aus A und B folgt	$x - z = 55$	D.
Aus D und C folgt	$2x = 140$	
	$x = 70$	E.
Aus E und B folgt	$y = 39$	
Aus E und C folgt	$z = 15.$	

Eine andere Auflösung.

Aus A, B und C folgt durch die Addition

$$2x + 2y + 2z = 248$$
$$x + y + z = 124$$

Da nun aus B $\quad x + z = 109,$

so ist $\quad z = 15$ u. s. f.

170.

Er kauft n Pfund Nelken, die kosten $27n$ Gr.

p Pfund Pfeffer » » $18p$ »

z Pfund Ingwer » » $9z$ »

und da Alles 15 Thlr. = 540 Gr. kostet;

so ist nach der Aufg. I. $27n + 18p + 9z = 540$

II. $n:p = 1:2.$ Daher $p = 2n$

III. $n:z = 1:3.$ » $z = 3n.$

Die Werthe für p und z aus II. und III. in I. gesetzt, giebt

$$27n + 36n + 27n = 540 = 90n$$

Folglich ist $n = 6$ Aus II. folgt

$p = 12$ Aus III. »

$z = 18.$

171.

A arbeitet x Tage, bekommt täglich 6 Gr., und in allen 6x Gr.

B » y » » » 7 » » » » 7y »

C » z » » » 8 » » » » 8z »

Nach der Aufgabe ist	$x + y + z = 146$	I.
und	$6x = 7y = 8z.$	
Also	$x = \frac{8z}{6} = \frac{4z}{3}$	II.
	$y = \frac{8z}{7}.$	III.
Aus I. II. III. folgt	$\frac{4z}{3} + \frac{8z}{7} + z = 146.$	IV.
	$z = 42$	
Aus II und IV folgt	$x = 56.$	V.
Aus I. IV und V folgt	$y = 48.$	

172.

Der Einkaufspreis sey x, so ist der Verlust $x - 224$ Thaler $= y$; wäre es aber für 260 Thaler verkauft, so wäre der Gewinn $260 - x$. Nach der Aufgabe ist nun

$$260 - x = 3y$$

oder $\quad 260 - x = 3x - 672$

$$4x = 932$$
$$x = \tfrac{932}{4} = 233.$$

172 a.

Wäre der Verkaufspreis $A + m$ gewesen, so wäre der Gewinn $z = A + m - x = m - (x - A)$, also nach der Aufgabe $= ny = n(x - A)$,

folglich $(n + 1)(x - A) = m$

$$x - A = \frac{m}{n + 1}$$

$$x = A + \frac{m}{n + 1}$$

$$y = x - A = \frac{m}{n + 1}$$

$$z = ny = \frac{mn}{n + 1}.$$

173.

Wenn A hatte x; B y; C z Thlr., so war nach der Aufgabe

I. $x + 100 = 2(y - 100) = 2y - 200.$
II. $y + 200 = 3(z - 200) = 3z - 600.$
III. $z + 60 = 5(x - 60) = 5x - 300.$

Aus I und II folgt $6z = 1900 + x$
und aus III $6z = 30x - 2160.$

Also ist $29x = 4060$
$x = 140$
$z = 340$
$y = 220.$

174.

Sind die drei Zahlen x, y und z; so ist nach der Aufgabe

$xy = 4(x + y + z)$ I.
$xz = 5(x + y + z)$ II
$yz = 6(x + y + z)$ III.

Aus I u. II folgt $4z = 5y$ IV.

$$z = y + \frac{y}{4}$$

$= 5A$ wenn $y = 4A$. V.

Aus I und III folgt $z = \frac{3x}{2}$ VI.

Aus V u. VI folgt $\frac{3x}{2} = 5A$

$$x = \frac{10A}{3} = 3A + \frac{A}{3}$$

Daher $x = 10B$ wenn $A = 3B$. VII.

Aus V und VII folgt $z = 15B$. VIII.

Aus IV u. VIII folgt $y = 12B$. IX.

Aus I, VII, VIII, IX folgt

$120B = 148.$

Also $B = \frac{37}{30}$.

Daher $x = 12\frac{1}{3}$; $y = 14\frac{4}{5}$; $z = 18\frac{1}{2}$.

175.

Namen der Kinder	Hatten anfänglich Nüsse	Hatten, nachdem A mitgetheilt hatte	Hatten, nachdem B mitgetheilt hatte	Hatten, nachdem C mitgetheilt hatte, nach der Aufgabe	
A	x	$x - y - z$	$2x - 2y - 2z$	$4x - 4y - 4z = 8$	I
B	y	$2y$	$3y - x - z$	$6y - 2x - 2z = 8$	II
C	z	$2z$	$4z$	$7z - x - y = 8$	III

Die Gleichung II durch 2 multiplicirt, giebt

$$12y - 4x - 4z = 16$$

Dazu die Gleichung I. $4x - 4y - 4z = 8$ addirt

giebt $8y - 8z = 24$

oder $y = z + 4$. IV.

Die Gleichung III durch 4 multiplicirt, giebt

$$28z - 4x - 4y = 32.$$

Dazu die Gleichung I. $4x - 4y - 4z = 8$ addirt,

giebt $24z - 8y = 40$

oder $y = 3z - 5$. V.

Die Gleichung IV von V abgezogen, giebt

$$0 = 2z - 8$$

oder

$$z = 4$$
$$y = 7$$
$$x = 13.$$

Anmerkung I. Diese Auflösung läßt sich noch beträchtlich abkürzen, wenn man die Gleichungen I, II, III unter folgende Formen bringt:

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & 4x - 4(x + y + z - x) = 8. \\
\text{II.} & 6y - 2(x + y + z - y) = 8. \\
\text{III.} & 7z - (x + y + z - z) = 8.
\end{array}$$

Setzt man nun $x + y + z = S$, so verwandeln sich diese drei Gleichungen in folgende:

$$\begin{array}{lll}
8x - 4S = 8. & \text{Daher} & x = 1 + \frac{1}{2}S \\
8y - 2S = 8 & & y = 1 + \frac{1}{4}S \\
8z - S = 8 & & z = 1 + \frac{1}{8}S
\end{array}$$

Da nun $S = 3 \times 8 = 24$, so ist $x = 13$

$$y = 7$$
$$z = 4$$

Anmerkung 2. Es ist leicht einzusehen, daß, wenn vier Personen vorhanden sind, und das, was jeder nach der letzten Mittheilung hat, H heißt, und also $S = 4H$, die letzten Gleichungen folgende seyn werden:

$$\begin{array}{l}
16x - 8S = H \\
16y - 4S = H \\
16z - 2S = H \\
16w - S = H
\end{array}$$

Sind überhaupt n Personen vorhanden, so hat man folgende n Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
2^n u - 2^{n-1} S = H \\
2^n v - 2^{n-2} S = H \\
2^n w - 2^{n-3} S = H \\
\dots\dots\dots\dots \\
2^n z - S = H
\end{array}$$

176.

Hier sollen 6 solche Größen gefunden werden, wie in der vorigen Aufgabe deren 3. Vermöge der zweiten Anmerkung zu Nro. 175 hat man, da hier $n = 6$ $H = \frac{384}{6} = 64$ folgende 6 Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
64u - 32S = 64 & \text{daher} & u = 1 + \frac{1}{2}S \\
64v - 16S = 64 & & v = 1 + \frac{1}{4}S \\
64w - 8S = 64 & & w = 1 + \frac{1}{8}S \\
64x - 4S = 64 & & x = 1 + \frac{1}{16}S \\
64y - 2S = 64 & & y = 1 + \frac{1}{32}S \\
64z - S = 64 & & z = 1 + \frac{1}{64}S
\end{array}$$

Da nun hier $S = 384$, so ist

$$\begin{array}{l}
u = 1 + \frac{384}{2} = 193 \\
v = 1 + \frac{384}{4} = 97 \\
w = 1 + \frac{384}{8} = 49 \\
x = 1 + \frac{384}{16} = 25 \\
y = 1 + \frac{384}{32} = 13 \\
z = 1 + \frac{384}{64} = 7.
\end{array}$$

177.

Hier sollen sich sieben Personen, der Vorschrift gemäß, auseinandersetzen, H und folglich auch S sind hier unbekannt, allein sie lassen sich leicht finden, weil man weiß, was der Stärkste bekommen. Man hat hier nämlich, weil $n = 7$, nach 175. Anmerkung 2, folgende sieben Gleichungen:

$$128t - 64S = H$$
$$128u - 32S = H$$
$$128v - 16S = H$$
$$128w - 8S = H$$
$$128x - 4S = H$$
$$128y - 2S = H$$
$$128z - S = H$$

Da nun $S = 7H$, und nach der Aufgabe $t = 449$, so giebt die erste Gleichung $128 \times 449 = 449H$, folglich $H = 128$ und $S = 896$ Setzt man diesen Werth von H in die 6 Gleichungen, so erhält man

$$u = 1 + \tfrac{1}{4}S = 1 + \tfrac{896}{4} = 225$$
$$v = 1 + \tfrac{1}{8}S = 1 + \tfrac{896}{8} = 113$$
$$w = 1 + \tfrac{1}{16}S = 1 + \tfrac{896}{16} = 57$$
$$x = 1 + \tfrac{1}{32}S = 1 + \tfrac{896}{32} = 29$$
$$y = 1 + \tfrac{1}{64}S = 1 + \tfrac{896}{64} = 15$$
$$z = 1 + \tfrac{1}{128}S = 1 + \tfrac{896}{128} = 8$$

Anmerkung. Das Gesetz, nach welchem die Werthe der unbekannten Größen in S ausgedrückt worden sind, ist keinesweges ein allgemeines, ob es gleich in den vorigen 3 Aufgaben Statt findet. Denn dieses rührt nur daher, weil in allen diesen Aufgaben $H = 2^n$ ist, wenn n die Anzahl der Personen bedeutet. Ist $H = m2^n$, so muß

die Einheit in den obigen Ausdrücken für die unbekannten Größen noch mit m multiplicirt werden. Die Werthe von x, y, z, z. B. in Nro. 175, werden demnach seyn

$$x = m + \tfrac{1}{2}S$$
$$y = m + \tfrac{1}{4}S$$
$$z = m + \tfrac{1}{8}S$$

Wäre z. B. in 175 $H = 24 = 3 \times 2^3$, so wäre $m = 3$, und daher $x = 3 + \tfrac{72}{2} = 39$

$$y = 3 + \tfrac{72}{4} = 21$$
$$z = 3 + \tfrac{72}{8} = 12$$

178.

Es sey die Anzahl der Ellen . . . . $= x$

so ist $5 : x = 7 :$ Einkaufspreis $= y$

und $7 : x = 11 :$ Verkaufspreis $= z$.

Daher der Einkaufspreis . . . . $= \frac{7x}{5}$

der Verkaufspreis . . . . $= \frac{11x}{7}$

daher nach der Aufg. $\frac{7x}{5} + 100 = \frac{11x}{7}$

$$\frac{49x}{35} + 100 = \frac{55x}{35}$$

$$100 = \frac{6x}{35}$$

$$x = \frac{3500}{6} = 583\tfrac{1}{3}$$

Daher der Einkaufspreis . . . . $\frac{7x}{5} = 816\tfrac{2}{3}$.

179.

Vom besten Tuche x Ellen, kosten . . . . $2\frac{1}{2}x$ Thlr.
» mittlern » y Ellen, kosten . . . . $2y$ Thlr.
» schlechten » z Ellen, kosten . . . . z Thlr.

Er nimmt des besten nur halb so viel als des andern.

Daher $2x = y$ A.

und des mittlern nur halb so viel als des schlechten.

Daher $2y = z$ B.

Nun ist nach der Aufg. $2\frac{1}{2}x + 2y + z = 52\frac{1}{2}$ C.

Aus B und C folgt $2\frac{1}{2}x + 4y = 52\frac{1}{2}$ D.

Aus D und A folgt $10\frac{1}{2}x = 52\frac{1}{2}$.

Daher $x = 5$ E.

Aus E und A folgt $y = 10$ F.

Aus F und B folgt $z = 20$.

180.

Es habe A x Thlr.; B y Thlr.; C z Thlr., so verlangt, um das Haus allein zu bezahlen, das 100 Thlr. kostet,

A zu seinem Gelde $\frac{1}{2}y$
B » » » $\frac{1}{3}z$
C » » » $\frac{1}{4}x$. Daher

I. $x + \frac{1}{2}y = 100$

II. $y + \frac{1}{3}z = 100$

III. $z + \frac{1}{4}x = 100$.

Aus I. und II. folgt $2x - \frac{z}{3} = 100$

oder $6x - z = 300$.

Dazu addirt III. $z + \frac{1}{4}x = 100$

giebt $6\frac{1}{4}x = 400$.

Daher $x = 64$
$z = 84$
$y = 72$.

181.

Betrug das verzehrte Geld N Thlr., und A hatte bei sich x; B z und C 4 Thlr.; so war nach der Aufgabe

I. $x + \frac{1}{4}y = N$.

II. $y + \frac{1}{2} = N$.

III. $4 + \frac{1}{2}x = N$.

Aus I. und II. folgt $x = \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}$.

Aus II. und III. folgt $x = 2y - 7$.

Also ist $\frac{3}{4}y + \frac{1}{2} = 2y - 7$.

Folglich $y = 6$
$x = 5$
$N = 6\frac{1}{2}$.

182.

Befinden sich x im Beutel A; y im Beutel B; z im Beutel C; so ist nach der Aufgabe

I. $x + 80 = 2\frac{1}{2}(y - 80)$ oder $2x = 5y - 560$.

II. $y + 120 = 3\frac{1}{2}(z - 120)$ oder $2y = 7z - 1080$.

III. $z + 60 = 4\frac{1}{3}(x - 60)$ oder $3z = 13x - 960$.

Man multiplicire I durch 2 und II durch 5; so ist

$10y - 1120 = 4x$ und

$10y + 5400 = 35z$. Von dieser jene subtrahirt, giebt $35z - 4x = 6520$. IV.

Diese Gleichung durch 13 multiplicirt, giebt

$455z - 52x = 84760$.

Die Gleichung III durch 4 multiplicirt, giebt

$12z - 52x = -3840$, und diese von der obern abgezogen $443z = 88600$.

Daher $z = 200$
$y = 160$
$x = 120$.

183.

Ist x der Gewinn des A; y der des B; z der des C; w der des D; so ist nach der Aufgabe

$$\text{I.}\quad 3x = 4y = 5z = 6w.$$
$$\text{II.}\quad x + y + z + w = 1710.$$

Aus I. folgt

$$x = 2w$$
$$y = \frac{3w}{2}$$
$$z = \frac{6w}{5}.$$

Diese Werthe in II. gesetzt, giebt

$$2w + \frac{3w}{2} + \frac{6w}{5} + w = 1710.$$

oder $\frac{57w}{10} = 1710$

also

$$w = 300$$
$$z = 360$$
$$x = 600$$
$$y = 450$$

Allgemeine Auflösung.

$$\text{I. ist}\quad Ax = By = Cz = Dw$$
$$\text{II.}\quad x + y + z + w = S.$$

Aus I. folgt

$$x = \frac{Dw}{A}$$
$$y = \frac{Dw}{B}$$
$$z = \frac{Dw}{C}$$

Diese Werthe in II. gesetzt, giebt

$$\frac{Dw}{A} + \frac{Dw}{B} + \frac{Dw}{C} + w = S.$$

oder $\frac{DwBC + DwAC + DwAB + wABC}{ABC} = S.$

Daher

$$w = \frac{ABCS}{ABC + ABD + ACD + BCD}$$
$$= \frac{ABCS}{AB\,(C + D) + CD\,(A + B)}$$

und wenn $AB\,(C + D) + CD\,(A + B) = N$ so ist

$$x = \frac{BCDS}{N}$$
$$y = \frac{ACDS}{N}$$
$$z = \frac{ABDS}{N}.$$

184.

E habe gewonnen x
F » » . . . . y
G » » . . . . z
H » » . . . . w

so ist nach der Aufgabe

$$\text{I.}\quad x + y + z + w = 1090$$
$$\text{II.}\quad \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{w}{6}$$

Folglich $20x = 15y = 12z = 10w$, wodurch diese Aufgabe auf die vorige zurückgeführt wird, und es ist

$A = 20;\ B = 15;\ C = 12;\ D = 10;$
$S = 1090;\ N = 10800.$

Daher denn $x = \frac{BCDS}{N} = \frac{15 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 1090}{10800}$
$= 181\frac{2}{3}$

$$y = \frac{ACDS}{N} = + \frac{20.12.10.1090}{10800} = 242\frac{2}{9}$$

$$z = \frac{ABDS}{N} = \frac{20.15.10.1090}{10800} = 302\frac{7}{9}$$

$$w = \frac{ABCS}{N} = \frac{20.15.12.1090}{10800} = 363\frac{1}{3}$$

III.

185.

A. Von x Personen zahlte jeder x Mgr.; also wurde x^2 Mgr. bezahlt.

Daher nach der Aufgabe $x^2 = 144.$

und $\sqrt{x^2} = \mp \sqrt{144}.$

Also $x = \mp 12.$

Von welchen beiden Werthen hier freilich der positive nur Sinn hat.

186.

Von x Personen zahlte jede x Pfennige.
Alle aber 2 Thlr. = 576 Pf.

Daher $x^2 = 576$
und $x = 24$ Pf. $= 3$ Mgr.

187.

Man kauft x Pferde, und jedes Pferd kostet $4x$ Thaler; alle aber 2500 Thlr.

Daher $x \times 4x = 4x^2 = 2500.$
Folglich $2x = \sqrt{2500}$
$= 50$
und $x = 25.$

188.

Das Vermögen sey . . . . $= x;$
so ist nach der Aufgabe $\frac{x}{10} \times \frac{x}{10} = 419904.$

Daher $\frac{x^2}{100} = 419904.$

Also $\frac{x}{10} = 648$
$x = 6480.$

189.

Das Alter des Hirsches in Jahren sey $= x$.

Nach der Aufgabe ist $3x \times \frac{x}{5} = 6000$.

$$\text{Daher} \quad \frac{3x^2}{5} = 6000$$

$$x^2 = (6000 \times 5) : 3 = 10000.$$

$$x = 100.$$

190.

Von der ersten Sorte Waare sey vorräthig .... x Pfd.
die nach der Aufgabe kostet .... x^2 Thlr.
Von der andern Sorte .... $2x$ Pfd.
kostet .... $4x^2$ Thlr.
Von der dritten Sorte .... $6x$ Pfd.
kostet .... $36x^2$ Thlr.
Da nun der ganze Vorrath $256\frac{1}{4}$ Thlr. kostet,

so ist $41x^2 = 256\frac{1}{4}$

und $x^2 = \frac{25}{4}$.

Daher $x = \frac{5}{2}$.

191.

Es sind x Kaufleute. Nach der Aufgabe legt jeder an $10x$ Thlr. Daher alle anlegen $10x^2$ Thlr. Mit jeden 100 Thlrn. gewinnen sie $2x$ Thlr.

Daher $100 : 2x = 10x^2$: ganzen Gewinn.

Also der ganze Gewinn $= \frac{2x \times 10x^2}{100} = \frac{x^3}{5}$.

Davon der 100te Theil $= \frac{x^3}{5} : 100 = \frac{x^3}{500}$, welcher durch $2\frac{2}{9}$ multiplicirt die Anzahl der Kaufleute geben soll.

$$\text{Daher} \quad \frac{x^3}{500} \times 2\frac{2}{9} = x$$

$$\text{und} \quad \frac{x^2}{225} = 1.$$

$$\text{Also} \quad x = 15.$$

Allgemeine Auflösung.

Jeder von den x Kaufleuten legt mx an, und daher alle mx^2. Mit jedem p gewinnen sie nx. Daher

$$p : nx = mx^2 : \text{Ganzen Gewinn} = \frac{nmx^3}{p}.$$

Davon der $q$te Theil, multiplicirt durch r, die Anzahl der Kaufleute geben soll.

$$\text{Daher} \quad \left\{\frac{nmx^3}{p} : q\right\} r = x.$$

$$\text{Also} \quad \frac{rnmx^3}{pq} = x.$$

$$x^2 = \frac{pq}{rnm}$$

$$x = \frac{\sqrt{pqrnm}}{rnm}.$$

192.

B. Die Anzahl der Armen sey $= x$.
Des Gebers Vorrath in Thlr. $= G$;
so ist nach der Aufgabe $2x = G$

$$Gx = 1058.$$

$$\text{Also} \quad 2x^2 = 1058$$

$$x = 23$$

$$G = 46.$$

193.

A hatte x und B y Thlr.

Daher nach der Aufgabe $x^2 + y^2 = 136$ I.

und $x^2 - y^2 = 64$. II.

Daher $2x^2 = 200$.

Folglich $x = 10$.

Diesen Werth in I gesetzt, giebt $y = 6$.

193 a.

Ist $y^2 + x^2 = S$ und

$y^2 - x^2 = D$

so ist $2y^2 = S + D$

$$y^2 = \frac{S + D}{2}$$

$$y = \mp\sqrt{\left\{\frac{S+D}{2}\right\}} = \mp\frac{\sqrt{2(S+D)}}{2}$$

Setzt man in die erste Gleichung für y^2 seinen Werth $\frac{S+D}{2}$, so erhält man

$$\frac{S+D}{2} + x^2 = S$$

$$S + D + 2x^2 = 2S$$

$$2x^2 = S - D$$

$$x^2 = \frac{S - D}{2}$$

$$x = \mp\sqrt{\frac{(S-D)}{2}} = \mp\frac{\sqrt{2(S-D)}}{2}$$

194.

Es sey die eine Zahl x, die andere y,

so ist nach der Aufgabe $xy = 22\frac{1}{2}$ I.

und $\frac{x}{y} = 2\frac{1}{2}$ II.

Aus II. folgt $x = 2\frac{1}{2}y$ III.

und aus I. und III. $x^2 = 22\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = \frac{225}{4}$.

Daher $x = \sqrt{\frac{225}{4}} = 7\frac{1}{2}$ IV.

Den Werth aus IV. in I. gesetzt,

giebt $y = 3$.

Allgemeine Auflösung.

Nach der Aufgabe sey $xy = P$ I.

und $\frac{x}{y} = Q$.

Folglich $x = Qy$ II.

Daher aus I. und II. $x^2 = PQ$

und $x = \sqrt{PQ}$. Diesen Werth in I. gesetzt, giebt $y\sqrt{PQ} = P$.

Daher $y = \frac{P}{\sqrt{PQ}} = \frac{\sqrt{P^2}}{\sqrt{PQ}} = \sqrt{\frac{P^2}{PQ}}$

$$= \sqrt{\frac{P}{Q}}$$

195 u. 195 a.

Es sey die eine Zahl $= x$; die andere y; so ist nach der

Aufgabe $\frac{x}{y} = q$ I.

und $x^2 - y^2 = d$. II.

Aus I folgt $x^2 = q^2y^2$ III.

Aus II u. III folgt $q^2y^2 - y^2 = d$

$$y^2 = \frac{d}{q^2 - 1}$$

$$y = \sqrt{\frac{d}{q^2 - 1}} \qquad \text{IV.}$$

Aus I und IV folgt $x = q\sqrt{\frac{d}{q^2 - 1}}$

In 195 ist $q = 5$, $d = 384$, daher

$$y = \sqrt{\frac{384}{25 - 1}} = \sqrt{\tfrac{384}{24}} = \sqrt{16} = 4$$

$$x = qy = 5y = 20$$

196.

A habe x; B habe y; C habe z:

so ist nach der Aufgabe $x : y = 7 : 3$ I.

und $y : z = 17 : 5.$ II.

Aus I folgt $y = \frac{3x}{7}.$

Aus I und II » $x : z = 7 \times 17 : 15.$

Daher $z = \frac{15x}{119}.$

A hat also x; B hat $\frac{3x}{7}$; C hat $\frac{15x}{119}$.

Das Geld von A durch das von B multiplicirt, giebt $\frac{3x^2}{7}$

» » » B » » » C » » $\frac{45x^2}{833}$

» » » A » » » C » » $\frac{15x^2}{119}.$

Daher nach der Aufg. $\frac{3x^2}{7} + \frac{45x^2}{833} + \frac{15x^2}{119} = 3830\frac{2}{3}$

oder $\frac{507x^2}{833} = \frac{11492}{3}$

Daher $x^2 = \frac{11492 \times 833}{3 \times 507}.$

Also $x = 79\frac{1}{3}$; $y = 34$; $z = 10.$

197.

Wenn y dasjenige was aus dem Capital von 1200 Thlr. Ende des ersten Jahrs, x dasjenige, was aus y nach eben dem Verhältniß Ende des folgenden Jahrs, und z dasjenige, was jährlich aus 100 Thlr. geworden; so ist

$1200 : y = y : x.$

Daher $x = \frac{y^2}{1200}.$

Nun ist nach der Aufg. $x = 1200 + 305\frac{7}{25} = 1505\frac{7}{25}$

$= \frac{37632}{25}.$

Daher $\frac{y^2}{1200} = \frac{37632}{25}$

$y^2 = \frac{37632 \times 1200}{25}$

$= 37632 \times 48$

Also $y = 1344.$

Folglich ist $1200 : 1344 = 100 : z.$

Daher $z = 112.$

Also der Gewinn auf 100 Thlr. $= 112 - 100 = 12.$

198.

A hat x Eier, verkauft jedes um n Gr. und löset also nx Gr.

B » y » » » » m » » » » my »

A sagt zu B, daß $ny = 15$ I.

B » » A, » $mx = 6\frac{2}{3}$ II. Nun ist ferner nach der Aufgabe: $x + y = 100.$ III.

$nx = my.$ IV.

Aus I und III folgt $x + \frac{15}{n} = 100.$ V.

Aus I und IV folgt $n^2 x = 15m.$ VI.

Aus II und VI folgt $n^2 x^2 = 100.$

Also $nx = 10.$ VII.

Aus V und VII folgt $x = 40.$ VIII.

Aus II und VIII folgt $m = \frac{1}{6}.$

Aus VII und VIII folgt $n = \frac{1}{4}.$

Aus III und VIII folgt $y = 60.$

199.

Die beiden Personen A und B hatten x Thlr. verzehrt.
A hatte zur Bezahlung der Zeche 5 Thlr. zu wenig, also $x - 5$.
B » » » » » 5 Thlr. zu viel, also $x + 5$.
Daher nach der Aufgabe $(x - 5) \times (x + 5) = 96$.

Also $x^2 - 25 = 96$

$x = 11$; $x - 5 = 6$; $x + 5 = 16$.

IV.

200.

A. Von x Personen zahlt jede in Gr. $x + 2$; also alle $x \times (x + 2) = x^2 + 2x$.

Daher nach der Aufg. $x^2 + 2x = 288$

und $x^2 = 2x + 288$.

Daher $x = -1 \mp \sqrt{(288 + 1)}$

$= -1 \mp 17$.

Also für diese Aufgabe $x = 16$.

201.

Des Gartens Breite in Ruthen sey $= x$;
also nach der Aufg. dessen Länge $= x + 6$
und der Flächeninhalt $= x^2 + 6x = 91$.

Daher $x^2 = -6x + 91$

$x = -3 \mp \sqrt{(91 + 9)}$

$= -3 \mp 10$.

Also für diese Aufgabe $x = 7$.

Die Länge $x + 6 = 13$.

201.

Er giebt jeden Tag x Thlr.; und da er sich $x + 6$ Tage aufhielt, so war die ganze Ausgabe
$x \times (x + 6) = x^2 + 6x = 135$ nach der Aufgabe.

Folglich $x^2 = -6x + 135$

$x = -3 \mp \sqrt{(135 + 9)}$

$= -3 \pm 12$.

Daher $= 9$.

Folglich $x + 6 = 15 =$ der Anzahl der Tage.

203.

Nach der Aufg. ist $x^2 = 35x + x + 800 + 32$.

Also $x^2 = 36x + 832$

und $x = 18 \mp \sqrt{[832 + (18)^2]}$

$= 18 + 34$

$= 52$.

204.

Das Pferd wird gekauft um x Thlr.

Nach der Aufg. ist $100 : x = x : \left(\frac{x^2}{100} = \text{dem Gewinn}\right)$

und $\frac{x^2}{100} + x = 119$.

Daher $x^2 = -100x + 11900$

und $x = -50 + \sqrt{(11900 + 2500)}$

$= -50 \mp 120$

$= 70$.

205.

In der Ringmauer befänden sich x Häuser.

Nach der Aufgabe ist

$$(x+55)\times(x-45)=x^2+10x-2475=900000.$$

Daher $x^2 = -10x + 902475$

$$\begin{aligned} x &= -5 \mp \sqrt{(902475+25)} \\ &= -5 \mp 950 \\ &= 945. \end{aligned}$$

206.

A arbeitet x Tage und erhält also x^2 Fl.

B » $x+1$ » » » » x^2+2x+1

C » $x+2$ » » » » x^2+4x+4.

Daher $3x^2+6x+5 = 245$

$$\begin{aligned} x^2 &= -2x+80 \\ x &= -1 \mp \sqrt{81} \\ &= -1 \mp 9 \\ &= 8; \end{aligned}$$ der hier anwendbare Werth.

207.

Der Hauptmann A hatte x Soldaten.

» » B » y »

Nach der Aufgabe bekam jeder Soldat des Hauptmann A $\frac{1200}{x}$ Gulden.

» » B $\frac{1200}{x-40}$ »

Da nun jeder der letztern 5 Gulden mehr erhielt; so ist

$$\frac{1200}{x}+5=\frac{1200}{x-40}$$

$$\frac{240}{x}+1=\frac{240}{x-40}$$

$$\frac{240+x}{x}=\frac{240}{x-40}$$

und $x^2 = 40x + 9600.$

Daher $x = 20 \mp \sqrt{(9600+400)}$

$= 20 \mp 100.$

Also $= 120.$

Daher bekommt jeder Soldat des Hauptm. A $\frac{1200}{x} = 10$

und » » » » B $\frac{1200}{x-40} = 15.$

208.

Es sey die eine Zahl $= x$, die andere also $= x + 75$; so ist nach der Aufgabe $(x+75)\times x = x^2+75x$.

Dies Produkt soll der Schüler durch x dividiren, und er findet

$$\frac{x^2+75x}{x} = 227 + \frac{113}{x}.$$

Der Lehrer findet das Exempel unrichtig, und behauptet, daß das Produkt um 1000 größer hätte seyn müssen. Daher sein Quotient um $\frac{1000}{x}$ zu klein seyn muß. Es wird daher

$$\frac{x^2+75x}{x} = 227 + \frac{113}{x} + \frac{1000}{x}$$

$$= 228 + \frac{1113}{x}$$ seyn.

Es ist also $x^2 + 75x = 227x + 1113$

$$x^2 = 152x + 1113$$
$$x = 76 \mp \sqrt{(1113 + (76)^2)}$$
$$= 76 \mp \sqrt{6889}$$
$$= 76 \mp 83$$
$$= 159.$$

Daher $x + 75 = 234.$

209.

Der Kamp ist $= 60$ Morg. $= 60 \times 120$ □R. $= 7200$ □R.

Seine Breite in Ruthen sey $= x$; so ist nach der Aufgabe die Länge $= 4x + 20$.

Daher $(4x + 20) \times x = 7200 = 4x^2 + 20x.$

Folglich $x^2 = -5x + 1800.$

Also
$$x = -\tfrac{5}{2} \mp \sqrt{(1800 + \tfrac{25}{4})}$$
$$= -\tfrac{5}{2} \mp \sqrt{\tfrac{7225}{4}}$$
$$= -\frac{5 \mp 85}{2}$$

also für diese Aufgabe $x = 40$

und die Länge $4x + 20 = 180.$

210.

Das Rathhaus habe x Stuben; so ist nach der Aufgabe
$(x - 5) \times (x - 6) = x^2 - 11x + 30 = x + 3.$

Daher $x^2 = 12x - 27$
$$x = 6 \mp \sqrt{(-27 + 36)}$$
$$= 6 \mp 3 = 9 \text{ oder } = 3.$$

211.

Wenn das Capital $= x$ Thlr.; so sind die einjährigen Zinsen dieses Capitals zu 5 p. C. . . . . . . $= \frac{x}{20}$

also die zweijährigen . . . . $= \frac{x}{10}$

Daher nach der Aufgabe $\left(\frac{x}{8} \times \frac{x}{10}\right) + 15 = x.$

Folglich $x^2 = 80x - 1200$

und $x = 40 \mp \sqrt{-(1200 + 1600)}$
$$= 40 \mp 20.$$

Also $x = 60$ oder 20.

212.

Man hat das Pfund mit x Groschen bedungen, und kauft x Pfd. Diese würden daher nach der Aufg. $(x \times x)$ Gr. kosten. Wegen gleich baarer Bezahlung kosten sie aber nach dem Vertrage nur

$$x \times (x - 1) = x^2 - x = 1190.$$

Daher $x^2 = x + 1190$
$$x = \tfrac{1}{2} \mp \sqrt{(1190 + \tfrac{1}{4})}$$
$$= \tfrac{1}{2} \mp \sqrt{\tfrac{4761}{4}}$$
$$= \frac{1 \mp 69}{2}.$$

Folglich ist $x = 35 =$ der Anzahl der Pfunde

und $x - 1 = 34 =$ der Anzahl der Groschen, die jedes Pfd. kostet.

213.

Erbauet wurde im Jahre x der Kirchthurm,

» » $x + 1$ das Rathhaus.

$$x\,(x+1) = x^2 + x = 2419580$$
$$x = -\tfrac{1}{2} \mp \sqrt{(2419580 + \tfrac{1}{4})}$$
$$= -\tfrac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{9678321}{4}}$$
$$= \frac{-1 \mp 3111}{2}$$
$$= 1555.$$

Also der Kirchthurm im Jahre $x = 1555$

das Rathhaus im Jahre $x - 1 = 1554$.

214.

Das Pfd. kostet im Einkauf x Mark.

Daher nach der Aufg. $100 : x = x : \left(\frac{x^2}{100} = \text{Gewinn}\right)$

und $x + \frac{x^2}{100} = 6$ Mk. 10 Schll. 3 Pf.

Da nun 1 Mk. = 16 Schll.; 1 Schll. = 12 Pf.

so ist 6 Mk. 10 Schll. 3 Pf. = $\frac{425}{64}$ Mk.

Folglich $\frac{x^2}{100} = -x + \frac{425}{64}$

$$x^2 = -100x + \tfrac{42500}{64}$$
$$x = -50 \mp \sqrt{(\tfrac{42500}{64} + 2500)}$$
$$= -50 \mp \sqrt{\tfrac{202500}{64}}$$
$$= -50 \mp \tfrac{450}{8}$$
$$= 6\tfrac{1}{4}.$$

215.

Wenn eine der Zahlen $= x$; so ist die andere $= x + 7$.

Daher nach der Aufg. $\frac{100}{x} + \frac{100}{x+7} = 43\frac{1}{3}$

und $100x + 700 + 100x = 43\frac{1}{3}x \times (x+7)$

$$= 43\tfrac{1}{3}x^2 + 303\tfrac{1}{3}x$$
$$43\tfrac{1}{3}x^2 = -103\tfrac{1}{3}x + 700$$
$$130x^2 = -310x + 2100$$
$$x^2 = -\tfrac{31}{13}x + \tfrac{210}{13}.$$

Daher $x = -\frac{31}{26} \mp \sqrt{\left\{\frac{210}{13} + \frac{961}{26^2}\right\}}$

$$= \frac{-31 \mp 109}{26} = 3.$$

Daher $x + 7 = 10$.

Bemerkung.

B. Die Auflösungen der Aufgaben von Nro 216 bis 219 findet man, wenn man in die, bei jeder Aufgabe im Exempelbuche angezeigten Formeln die entsprechenden Zahlen setzt.

220.

Die Zahlen sind x; $x+d$; $x+2d$; $x+3d$; $x+4d$; $x+5d$; $x+6d$; $x+7d$.

Nach der Aufgabe ist

$(x+3d) + (x+4d) = 2x + 7d = 34$ I.

und $x \times (x+7d) = x^2 + 7dx = 93.$ II.

Aus I folgt $2x^2 + 7dx = 34x.$ III.

Aus II und III $x^2 = 34x - 93.$

Daher $x = 17 \mp \sqrt{[-93 + (17)^2]}$

$$= 17 \mp 14$$
$$= 31 \text{ oder } 3.$$

Setzt man diese Werthe für x in I;
so ist, wenn $x = 31 \quad d = -4$
und wenn $x = 3 \quad d = +4$. Also die Zahlen

31; 27; 23; 19; 15; 11; 7; 3 oder
3; 7; 11; 15; 19; 23; 27; 31

nachdem die Zahlen in einer abnehmenden oder in einer zunehmenden Progression gedacht werden sollen.

220 a.

Aus der Lehre von den arithmetischen Progressionen ist bekannt, daß, wenn die Anzahl der Glieder gerade ist, die Summe des ersten und letzten Gliedes der Reihe der der beiden mittlern gleich ist. Nennt man daher das erste Glied x, das letzte y, so hat man nach der Aufgabe folgende zwei Gleichungen:

$$x + y = S \qquad \text{I.}$$

$$xy = P \qquad \text{II.}$$

Aus I folgt $y = \frac{P}{x}$ III.

Aus I u. III $x + \frac{P}{x} = S$

$$x^2 - Sx = -P$$

$$x^2 - Sx + \tfrac{1}{4}S^2 = \tfrac{1}{4}S^2 - P = \frac{S^2 - 4P}{4}$$

$$x - \tfrac{1}{2}S = \sqrt{\frac{S^2 - 4P}{4}} = \frac{\mp\sqrt{(S^2 - 4P)}}{2}$$

$$x = \frac{S \mp \sqrt{(S^2 - 4P)}}{2}$$

$$y = S - x = \pm\frac{\sqrt{(S^2 - 4P)}}{2}$$

folglich nach (106) 4. $d = \frac{y - x}{n - 1} = \pm\frac{\sqrt{(S^2 - 4P)}}{n - 1}$

221.

Wenn die erste Zahl $= x$; so sind die Zahlen
$x;\ x + d;\ x + 2d;\ x + 3d;\ x + 4d;\ x + 5d;\ x + 6d$
und die größte Zahl $x + 6d$.

Die Summe aller Zahlen $7x + 21d$.

Das Produkt der beiden kleinsten

$$x \times (x + d) = x^2 + xd.$$

Daher ist nach der Aufgabe

$$\frac{x^2 + dx}{3} + 28 = 7x + 21d \qquad \text{I.}$$

und $x + 6d = 33.$ II.

Daher $x = 33 - 6d$ III.

$$x^2 = 36d^2 - 396d + 1089. \qquad \text{IV.}$$

Die Werthe aus III und IV in I gesetzt, giebt

$$d^2 - 10d + 16 = 0.$$

Folglich $d = 5 \mp \sqrt{9}$
$= 5 \mp 3 = 8$ oder $= 2$
$x = -15$ oder $= 21$

und die Summe aller Zahlen $= 63$ und 189.

Also ist die eine Reihe
$-15;\ -7;\ +1;\ +9;\ +17;\ +25;\ +33$
die andere 21; 23; 25; 27; 29; 31; 33.

222.

Es sey die erstere Zahl $= x$; der Exponent der Progression $= e$; so sind die drei Zahlen der geometrischen Progression

$$x;\quad xe;\quad xe^2.$$

Daher nach der Aufgabe

$$x + xe + xe^2 = 105 \qquad \text{I.}$$

und $\qquad x^3e^3 = 8000 \qquad$ II.

Also $\qquad xe = 20 \qquad$ III.

Aus I und III folgt $x + xe^2 = 85 \qquad$ IV.

Aus III u. IV folgt $\frac{e^2+1}{e} = \frac{85}{20} = \frac{17}{4}$.

Daher $\qquad e^2 = \frac{17e}{4} - 1$

und $\qquad e = \frac{17}{8} \mp \sqrt{-(1 + \frac{289}{64})}$

$$= \frac{17 \mp 15}{8}. \qquad \text{V.}$$

Also $\qquad e = 4$ oder $\frac{1}{4}$

nachdem man die Progression zunehmend oder abnehmend haben will.

Aus III und V folgt $x = 5$ oder $= 80$. Daher die Zahlen 5; 20; 80.

Anmerkung. Die Aufgabe gehört in den Vten Abschnitt, B.

223.

Es sey die arithmetische Progression $x;\ x + a;\ x + 2a;$ so ist die geometrische Progression $2x;\ 3x + 3a;\ 6x + 12a$

und $\qquad 14x + 18a = 96.$

Also $\qquad x = \frac{48 - 9a}{7}.$

Daher die geometrische Progression

$$\frac{96 - 18a}{7};\ \frac{144 - 6a}{7};\ \frac{288 + 30a}{7}$$

oder $\frac{6}{7}(16 - 3a);\ \frac{6}{7}(24 - a);\ \frac{6}{7}(48 + 5a).$

Da nun das Produkt der äußern Glieder = dem Quadrat des mittlern; so ist

$$a^2 - 48a + 576 = 768 - 64a - 15a^2.$$

Also $\qquad a^2 = -a + 12.$

Daher $\qquad a = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{(12 + \frac{1}{4})}.$

$$= 3.$$

Folglich ist $x = \frac{48-9a}{7} = 3$. Also sind die Zahlen der arithmetischen Progression 3; 6; 9 und die der geometrischen 6; 18; 54.

224.

Wenn die eine Zahl x, die andere y; so ist nach der

Aufgabe $\qquad x + y = 35 \qquad$ I.

und $\qquad x^2 + y^2 = 625. \qquad$ II.

Aus I folgt $\qquad y = 35 - x$

$$y^2 = x^2 - 70x + 1225. \qquad \text{III.}$$

Aus II u. III folgt $2x^2 - 70x + 1225 = 625$

$$x^2 = 35x - 300$$

$$x = \frac{35}{2} \mp \sqrt{(-300 + \frac{1225}{4})}$$

$$= \frac{35 \mp 5}{2}$$

$$= 20 \text{ oder } 15. \qquad \text{IV.}$$

Aus I u. IV folgt $y = 15$ oder 20.

Eine allgemeine Auflösung findet sich bei der folgenden Aufgabe.

225.

Die eine Zahl sey $= x$, die andere $= y$;
so ist nach der Aufgabe $x + y = 16$ I.
und $x^2 + y^2 = 130.$ II.

Aus I folgt $y = 16 - x$
und $y^2 = 256 - 32x + x^2.$ III.

Aus II folgt $y^2 = 130 - x^2$ IV.

Aus III u. IV $x^2 = 16x - 63$

$$x = 8 \mp \sqrt{(-63 + 64)}$$
$$= 8 + 1.$$

Also $x = 9$ oder 7. Diesen Werth in I gesetzt,
giebt $y = 7$ oder 9.

Allgemeine Auflösung.

Es sey $x + y = S$ I.
$x^2 + y^2 = Q.$ II.

Aus I folgt $y = S - x$
$y^2 = S^2 - 2Sx + x^2$ III.

Aus II folgt $y^2 = Q - x^2$ IV.

Aus III u. IV folgt $x^2 = Sx + \frac{Q - S^2}{2}$

$$x = \frac{S}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{Q - S^2}{2} + \frac{S^2}{4}\right)}$$
$$= \frac{S \mp \sqrt{(2Q - S^2)}}{2}$$

226.

Das Geld des Einen sey in Thaler $= x$, des Andern $= y$;
so ist nach der Aufgabe
$x + y = 92$ I.
$xy = 672$ II.

Aus I folgt $y = 92 - x$. Diesen Werth in II gesetzt,
giebt $92x - x^2 = 672$

$$x^2 = 92x - 672$$
$$x = 46 \mp \sqrt{[-672 + (46)^2]}$$
$$x = 46 \mp \sqrt{1444}$$
$$= 46 \mp 38$$
$$= 84 \text{ oder } 8$$

also $y = 8$ oder 84

Allgemeine Auflösung.

Es sey $x + y = S$
Folglich $y = S - x.$
Ferner sey $xy = P = x(S - x) = xS - x^2.$
Daher $x^2 = xS - P$

Folglich
$$x = \frac{S}{2} \mp \sqrt{\left(-P + \frac{S^2}{4}\right)}$$
$$= \frac{S}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{-4P + S^2}{4}\right)}$$
$$= \frac{S \mp \sqrt{(S^2 - 4P)}}{2}$$
(Man vergleiche 220 a.)

und
$$y = \frac{S \pm \sqrt{(S^2 - 4P)}}{2}$$

Eine andere Auflösung.

Es sey $x + y = S$ I.
$xy = P$ II.

Aus I folgt $x^2 + 2xy + y^2 = S^2$ III.

Aus II folgt $4xy = 4P$ IV.

Aus III u. IV $x^2 - 2xy + y^2 = S^2 - 4P$
oder $(x - y)^2 = S^2 - 4P.$

Daher $x - y = \pm \sqrt{(S^2 - 4P)}$ V.

Aus I u. V folgt $2x = S \pm \sqrt{(S^2 - 4P)}$

und $2y = S \mp \sqrt{(S^2 - 4P)}$

Daher $x = \frac{S \pm \sqrt{(S^2 - 4P)}}{2}$

$y = \frac{S \mp \sqrt{(S^2 - 4P)}}{2}$ wie vorhin

227.

Setzt man in die eben gefundene Formel $S = 77$, $P = 1176$, so wird

$$x = 77 \pm \sqrt{\left(\frac{5929 - 4704}{2}\right)} = \frac{77 \mp 35}{2} = 21$$

und $y = 77 - 21 = 56$

228.

Setzt man in die Formel von Nro 226 $S = 20$; $P = 96$;

so ist $x = \frac{20 + \sqrt{16}}{2} = 8$

und daher $y = 20 - x = 12$

229.

Wenn die eine Zahl $= x$, die andere $= y$;

so ist nach der Aufg. $x - y = 8$ I

und $(x - 8)(y + 6) = 352$.

Also $xy + 6x - 8y = 400$

und $6x + (x - 8)y = 400$. II.

Aus I folgt $y = x - 8$ III.

und aus II u. III $6x + x^2 - 16x + 64 = 400$.

Daher ist $x^2 - 10x = 336$

$x = 5 \mp \sqrt{361}$

$= 5 \mp 19$

$= 24$

Also aus III $y = 16$.

230.

Wären es x Tücher, und jedes kostete n Thlr.; so kosten alle Tücher nx Thlr.; wären 3 Tücher mehr, also $x + 3$ Tücher, und jedes kostete 3 Thlr. weniger als zuvor, also $n - 3$; so kosten alle diese Tücher $(x + 3) \times (n - 3)$ Thlr., und es ist nach der Aufgabe

I. $nx = 180$

und II. $(x + 3)(n - 3) = 180$.

Also $nx + 3n - 3x - 9 = nx$

und $n = x + 3$.

Aus I folgt $n = \frac{180}{x}$

Daher $x + 3 = \frac{180}{x}$

Folglich ist $x^2 = -3x + 180$

$x = -\frac{3}{2} \mp \sqrt{(180 \mp \frac{9}{4})}$

$= \frac{-3 \mp \sqrt{729}}{2} = \frac{-3 + 27}{2}$.

Also $x = 12$ und $n = 15$.

231.

A verkauft x Ellen, jede um n Thlr., löset also nx Thlr.

B verkauft y Ellen,

jede um m Thlr.

Nun ist $y = x + 3$, löset also $m(x + 3)$ Thlr.

A spricht zu B, daß $n(x+3) = 24$ I.

B spricht zu A, daß $mx = 12\frac{1}{2}$ II.

Ferner ist nach der Aufgabe

$$nx + m(x+3) = 35 \qquad \text{III.}$$

Aus I u. III folgt $\frac{24x}{x+3} + m(x+3) = 35.$

Also $m(x+3)^2 = 11x + 105$ IV.

Aus II u. IV folgt $\frac{25}{2x} \times (x+3)^2 = 11x + 105.$

Also $x^2 = 20x - 75.$

Folglich $x = 10 \mp \sqrt{(-75 + 100)}$

Daher das, was A verkauft $= 15$ oder 5 V.

das, was B verkauft $= 18$ oder 8.

Aus II und V folgt $m = \frac{5}{6}$ oder $2\frac{1}{2}$.

Aus I und V folgt $n = 1\frac{1}{3}$ oder 3

232.

Die Anzahl der Thaler, die die jüngere Tochter erhält, sey $= x$; so erhalten die 4 Töchter nach der Aufgabe

$$x;\; xe;\; xe^2;\; xe^3.$$

Auch ist nach derselben $xe^3 + x = 17\frac{1}{2} = \frac{35}{2}$ I.

und $x \times xe \times xe^2 \times xe^3 = 2916 = x^4e^6$ II.

Daher $x^2e^3 = 54$

und $e^3 = \frac{54}{x^2}$ III.

Aus I und III folgt

$$\frac{54}{x} + x = \frac{35}{2}$$

$$54 + x^2 = \frac{35x}{2}$$

Folglich $x^2 = \frac{35x}{2} - 54$

$$x = \frac{35}{4} \mp \sqrt{(-54 + \frac{1225}{16})}$$

$$= \frac{35 \mp \sqrt{361}}{4} = \frac{35 \mp 19}{4}.$$

Daher $x = 4.$

Diesen Werth in III gesetzt, giebt

$$e = \frac{3}{2}.$$

Hiernach sind die Zahlen $4;\; 6;\; 9;\; 13\frac{1}{2}$.

233.

Die eine Zahl sey x; die andere $x + a = y$; so ist nach der Aufg. $x^2 + (x+a)^2 = b.$

Daher $2x^2 + 2ax + a^2 = b$

und $x^2 = -ax + \frac{b - a^2}{2}.$

Also $x = -\frac{a}{2} \mp \sqrt{\left\{\frac{b-a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right\}}$

$$= \frac{-a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$$

und $y = \frac{a \mp \sqrt{(2b - a^2)}}{2}.$

Nach der Aufgabe ist $a = 5;\; b = 73.$

Daher $x = 3;\; y = 8.$

237.

Wenn der Werth des wohlfeilern Buchs in Pf. $= x$

der des theurern » » » $= y$

so ist nach der Aufgabe $y + x = 600.$

Daher $y = 600 - x$

und $(288 - x) \times (y - x) = 13376$

oder $(288 - x) \times (600 - 2x) = 13376.$

Daher $x^2 = 588x - 79712$

und $x = 294 \mp \sqrt{[-79712 + (294)^2]}$

$= 294 + \sqrt{6724}$

$= 294 \mp 82.$

Also $= 376$ oder $212.$

Der erstere Werth findet nicht Statt, weil die wohlfeilere $\angle \frac{600}{2}$ seyn muß. Daher $x = 212$ Pf. $= 26$ Gr. 4 Pf.

und $y = 388$ Pf. $= 1$ Thlr. 12 Gr. 4 Pf.

235.

Es sey die Anzahl der Schüler in der höchsten Klasse $= x$; und es zahle jeder in der untern Klasse vierteljährig n Thlr. so zahlen nach der Aufgabe vierteljährig

in der höchsten Klasse x Schüler $(n + 8)\, x$ Thlr.

» » mittlern » $x + 11$ » $(n + 3)(x + 11)$ Thlr.

» » untern » $x + 22$ » $n\,(x + 22)$ Thlr.

Ferner ist nach der Aufgabe $x = 1\frac{1}{3}n = \frac{4n}{3}$ I.

u. $(nx + 8x) + (nx + 11n + 3x + 33) + (nx + 22n)$

$= 73n$ II.

Aus II folgt $3nx + 11x + 33 = 40n.$ III.

Aus I folgt $n = \frac{3x}{4}.$ IV.

Aus III u. IV folgt $\frac{9x^2}{4} + 11x + 33 = 30x.$

Daher $x^2 = \frac{76x}{9} - \frac{44}{3}$

$x = \frac{38}{9} \mp \sqrt{(-\frac{44}{3} + \frac{1444}{81})}$

$= \frac{38}{9} \mp \sqrt{\frac{256}{81}}$

$= \frac{38 \mp 16}{9} = 6.$ V.

Daher in der mittlern Klasse $x + 11 = 17$

und in der untern Klasse $x + 22 = 28.$

Aus IV und V folgt $n = \frac{9}{2}.$

236.

Wenn die Höhe des Thurms x Fuß; so ist nach der Aufg.

$x - 106 = (y)^3$ I.

und $x + 1009 = (y + 5)^3$

$= y^3 + 15y^2 + 75y + 125.$ II.

Aus I u. II folgt $15y^2 + 75y + 125 = 1115.$

Also $y^2 = -5y + 66$

Folglich $y = -\frac{5}{2} \mp (\sqrt{66 + \frac{25}{4}})$

$= \frac{-5 \mp 17}{2} = 6.$ III.

Aus I u. III folgt $x = 322.$

237.

Unter den zwanzig Personen sey die Anzahl der Männer $= m$.
Die Anzahl der Frauen $= w = 20 - m$.
Von den Männern verzehrt einer x Gr.

also alle $mx = 24$ nach der Aufgabe.

Daher $x = \frac{24}{m}.$

Von den Frauen verzehrt eine $x - 1$ Gr.

also alle $(x - 1)\, w = (x - 1) \times (20 - m) = 24$ nach der Aufgabe.

Daher $(x-1)\times(20-m)=\left\{\frac{24}{m}-1\right\}\times(20-m)$
$= 24.$

Also $\frac{24-m}{m}\times(20-m)=24$

und $(24-m)\times(20-m)=24m.$

Daher $m^2 = 68m - 480$

$m = 34 \mp [\sqrt{-480+(34)^2}]$
$= 34 \mp \sqrt{676}$
$= 34 \mp 26.$

Also $m = 8$ oder $60.$

Daher $w = 20 - m = 20 - 8 = 12$

oder $= 20 - 60 = -40.$

Folglich findet der letztere Werth für m nicht Statt. Daher nur $m = 8$ seyn kann.

Da nun $x = \frac{24}{m}$, so ist $x = 3$, was jeder Mann verzehrte, und $x - 1 = 2$, was eine Frau verzehrte.

238.

A legt x ein, gewinnt in einem Monate $\frac{x}{m}$, und im vierten $\frac{4x}{m}$

B legt $y = (200 - x)$ ein, gewinnt in einem Monate $\frac{200-x}{m}$, und in dreien $\frac{3(200-x)}{m}$.

Daher nach der Aufgabe $x + \frac{4x}{m} = 176$ I.

und $(200-x) + 3\left\{\frac{200-x}{m}\right\} = 228.$ II.

Aus I folgt $m = \frac{4x}{176-x}.$

Aus II folgt $m = \frac{600-3x}{28+x}.$

Daher $\frac{4x}{176-x} = \frac{600-3x}{28+x}$

und $112x + 4x^2 = 3x^2 - 1128x + 105600$

$x^2 = -1240x + 105600$

$x = -620 \mp \sqrt{490000} = 80$

und $y = 120.$

V.

239.

A. Der Gärtner hatte x Gärten, in jedem x Bäume; also in allen x Gärten, x^2 Bäume. Von jedem Baum x Thlr. also von allen x^2 Bäumen $x^2 \times x$ Thlr.

Daher $x^3 = 4096$

$x = \sqrt[3]{4096} = 16 =$ der Anzahl der Gärten.

$x^2 = 256$ der Anzahl der Bäume.

240.

Hatte er x Thlr.; so war nach der Aufgabe

$$x^2 \times \frac{1}{4}x = 432.$$

Daher $x^3 = 1728$

und $x = \sqrt[3]{1728} = 12.$

241.

Die erste der Zahlen sey $= x,$

und da der Exponent $= 2;$

so ist die zweite Zahl $= 2x$

die dritte Zahl $= 4x.$

Daher ist nach der Aufgabe $16x^2 \times x = 432.$

Folglich ist $x^3 = 432 : 16 = 27.$

Also $x = \sqrt[3]{27} = 3.$

Daher sind die drei Zahlen 3; 6; 12.

242.

x Hauptleute haben nach der Aufgabe unter sich $3x^2$ Reuter und $20x^2$ Fußgänger.

Die Reuter bekommen an Monatsgeld . . . . . $3x^3$ Gulden.

» Fußgänger » » » . . . . $10x^3$ »

Daher $3x^3 + 10x^3 = 13000 = 13x^3.$

Folglich $x = 10 =$ der Anzahl der Hauptleute

$3x^2 = 300 =$ » » » Reuter

$20x^2 = 2000 =$ » » » Fußgänger

$3x^3 = 3000 =$ » » » Gulden f. d. Reuter

$10x^3 = 10000 =$ » » » » für d. Fußgänger.

243.

Wenn zur Reise x Thlr. bestimmt sind; so kommen davon nach der Aufgabe $\frac{1}{4}x$ zur Hinreise

$\frac{1}{3}x$ zur Rückreise

$\frac{1}{8}x$ zum Aufenthalt, und es ist

$$\frac{1}{4}x \times \frac{1}{3}x \times \frac{1}{8}x = 9216.$$

Daher $x^3 = 9216 \times 96$

$x = 96.$

244.

Wenn das Capital x Thlr.; so ist

$$\frac{1}{2}x \times \frac{2}{3}x \times \frac{3}{4}x = 54000 = \frac{x^3}{4}$$

Daher $x^3 = 216000$

$x = 60.$

245.

Wenn die Tiefe $= x$ Ellen; so ist nach der Aufgabe die Breite $4x$, und die Länge $32x$ Ellen. Daher der körperliche Inhalt $128x^3$ Cubik-Ellen, und

$$8 : 128x^3 = 1\tfrac{1}{2} : 273\tfrac{3}{8}.$$

Folglich $x^3 = \frac{729}{64}$ und

$x = \frac{9}{4}$ Ellen $=$ der Tiefe

$4x = 9$ » der Breite

$32x = 72$ » der Länge.

246.

B. Sind es x Kaufleute, und der Gewinn g Fl.; so ist nach der Aufgabe die Einlage $= 100x^2$ und

$$100 : 2x = 100x^2 : g.$$

Daher $g = 2x^3 = 2662$
$$x^3 = 1331$$
$$x = \sqrt[3]{1331} = 11.$$

247.

Es sey die Anzahl der Hühner . . . . $= y$
die der Enten . . . . $= x$.
Nach der Aufgabe legen die Hühner $\frac{1}{3}y^2$ Eier
und es ist $9 : \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}y^2 : 72$.

Daher $\frac{y^3}{9} = 648$

und $y = 18$.

Da nun ferner nach der Aufgabe $x : y = 2 : 3$
so ist $x = 12$.

248.

Es sey die größere Zahl $= x$; die kleinere $= y$; so ist
nach der Aufg. $x^2 y = A$ I.
$y^2 x = B$. II.

Aus I folgt $y^2 = \frac{A^2}{x^4}$ III.

Aus II u. III folgt $x^3 = \frac{A^2}{B}$

$$x = \sqrt[3]{\frac{A^2}{B}}$$

und $y = \sqrt[3]{\frac{B^2}{A}}$.

Nach der Aufgabe ist $A = 48$; $B = 36$.

Daher $x = \sqrt[3]{\frac{48 \times 48}{36}} = 4$

$$y = \sqrt[3]{\frac{36 \times 36}{48}} = 3.$$

248 a.

Aus $x^2 y = G$ folgt $x^4 y^2 = G^2$, daher $y^2 = \frac{G^2}{x^4}$

und aus der Gleichung $y^2 x = K$ folgt $y^2 = \frac{K}{x}$

mithin ist $\frac{G^2}{x^4} = \frac{K}{x}$ also

$$G^2 x = K x^4$$
$$K x^3 = G^2$$
$$x^3 = \frac{G^2}{K}$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{G^2}{K}}$$

Folglich $y^2 = \frac{K}{x} = \frac{K}{\sqrt[3]{\frac{G^2}{K}}} = \sqrt[3]{\frac{K^3}{\frac{G^2}{K}}} = \sqrt[3]{\frac{K^4}{G^2}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{K^2}{G}} \times \sqrt[3]{\frac{K^2}{G}}$$

daher $y = \sqrt[3]{\frac{K^2}{G}}$.

249.

Sind die Zahlen x; y; z; so ist nach der Aufgabe
$x^2 y = 36$ 1.
$y^2 z = 80$ 2.
$z^2 x = 75$ 3.
Daher $x^3 y^3 z^3 = 36 \times 80 \times 75$
und $xyz = 60$.
Also $y = \frac{60}{xz}$ 4.

Aus 1 folgt $y = \frac{36}{x^2}$ 5.

Aus 4 u. 5 folgt $3 : 5 = x : z$ 6.

Aus 3 folgt $x : 3 = 25 : z^2$ 7

Daher $3x : 15 = 25x : z^3$

oder $1 : 5 = 25 : z^3$.

Folglich ist $z = 5$ 8.

Aus 8 und 6 folgt $x = 3$ 9.

Aus 5 und 9 folgt $y = 4$.

249 a.

$x^2 y = P$ 1.

$y^2 z = Q$ 2.

$z^2 x = R$ 3.

Aus 1 folgt $y^2 = \frac{P^2}{x^4}$ 4.

Aus 2 folgt $y^2 = \frac{Q}{z}$ 5.

Aus 4 u. 5 folgt $\frac{P^2}{x^4} = \frac{Q}{z}$ 6.

Aus 6 folgt $P^2 z = Q x^4$ 7.

Aus 3 folgt $x = \frac{R}{z^2}$ 8.

Aus 7 u. 8 folgt $P^2 z = Q \cdot \frac{R^4}{z^8}$ 9.

Aus 9 folgt $P^2 z^9 = R^4 Q$

$$z^9 = \frac{R^4 Q}{P^2}$$

$$z = \sqrt[9]{\frac{R^4 Q}{P^2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{Q}{z}} = \sqrt[9]{\frac{Q^4 P}{R^2}}$$

$$x = \frac{R}{z^2} = \sqrt[9]{\frac{P^4 R}{Q^2}}.$$

VI.

Vorerinnerung.

Die Auflösung dieser Aufgaben wird immer am leichtesten bewerkstelligt werden, wenn man die dazu führende auf 0 gebrachte Gleichung dahin bringt, daß sich unter den Faktoren des letzten Gliedes die Werthe der gesuchten Größe finden. Wie dies geschehen könne, lehrt die Algebra. Welcher Faktor des letzten Gliedes dieser Werth sey, ersieht man daraus, wenn er für die unbekannte Größe in die Gleichung substituirt, diese auf 0 bringt. Hat das letzte Glied viele Faktoren, so kann es freilich der Versuche viel geben, indessen giebt die Algebra auch Mittel an die Hand, die Versuche abzukürzen. Es sey die gegebene cubische Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad \text{D.}$$

und $x = y + a$

so entsteht, den Werth von x in die Gleichung D gesetzt, die Gleichung

$$\begin{array}{lllll} y^3 & + 5ay^2 & + 3a^2y & + a^3 = 0 & \text{E.} \\ & + a & + 2aA & + Aa^2 & \\ & & + B & + Ba & \\ & & & + C. & \end{array}$$

Hat nun das letzte Glied der Gleichung E, nämlich $a^3 + Aa^2 + Ba + C$ weniger Faktoren, als C das letzte Glied der Gleichung D, so kann man unter diesen den Werth für y eher ausfinden, als den Werth für x in D. Da aber $x = y + a$, so findet sich x leicht, weil man y weiß.

Anmerkung. Die Gleichung muß aber so geordnet seyn, daß die höchste Potenz der unbekannten Größe keinen

Koefficienten hat, und die übrigen Koefficienten ganze Zahlen sind. Die Algebra giebt Mittel an die Hand, wie die gebrochnen Koefficienten aus einer Gleichung weggeschafft werden können, ohne daß dadurch die höchste Potenz der unbekannten Größe einen Koefficienten erhalte. Hat man die Gleichung nun so eingerichtet, so ist es bisweilen vortheilhaft für die unbekannte Größe x, eine andere mit einer bekannten Größe multiplicirte, z. B. my, zu setzen. Hierdurch erhält zwar die höchste Potenz von y den Koefficienten m^3; allein es lassen sich oft alle Glieder durch m^3 ohne Rest theilen; dadurch verliert nicht nur die höchste Potenz ihren Koefficienten, sondern das letzte Glied wird auch viel kleiner, und es lassen sich die Faktoren desselben leichter finden.

250.

x Personen fangen einen Handel an, jeder giebt dazu 10x Thlr. also alle $10x^2$ Thlr. Daher nach der Aufgabe

$$100 : x + 6 = 10x^2 : 392.$$

Daher $x^3 + 6x^2 - 3920 = 0.$ F.

Man setze $a = 1$; $x = y + a = y + 1$ und vergleiche die Gleichung F mit D der Vorerinnerung, so ist

$A = 6$; $B = 0$; $= - 3920$. Daher

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 7 - 3920 = - 3913.$$

Die Faktoren dieser Zahl sind 1; 7; 13; 43; 91; 301; 559. Daher y unter diesen Zahlen befindlich; folgl. x unter den Zahlen 2; 8; 14; 44; 92; 302; 560. Von welchen man leicht einsehen kann, daß $x = 2$ oder $= 8$ die Gleichung F nicht auf 0 bringen könne, daher man den

Versuch mit 14 macht. Diese bringt die Gleichung F auf 0. Daher $x = 14$.

1. Anmerk. Die beiden andern Wurzeln sind unmöglich; denn theilt man $x^3 + 6x^2 - 3920 = 0$ durch $x - 14 = 0$; so entsteht $x^2 + 20x + 280 = 0$, welche Gleichung nnmögliche Wurzeln enthält.

Eine andere Auflösung.

Setzt man in die cubische Gleichung

$$x^3 + 6x^2 - 3920 = 0, \quad x = 2y,$$

so erhält man $8y^3 + 24y^2 - 3920 = 0$. Hier läßt sich nun die ganze Gleichung durch 8 theilen, und es wird

$$y^3 + 3y^2 - 490 = 0.$$

Die Faktoren von 490 lassen sich weit leichter finden als die von 3920, sie sind 1; 2; 5; 7; 10; 14; 35; 49; 70; 98; 490; daher y unter diesen Zahlen befindlich, folglich x unter den Zahlen 2; 4; 10; 14; 20; 28; 70; 98; 140; 196; 980. Die linke Seite der Gleichung für y wird aber $= 0$, wenn $y = 7$ setzt. (Daß 1; 2; 5 die Gleichung nicht auf 0 bringen, sieht man leicht.) Da nun $y = 7$, so ist $x = 14$.

251.

Wenn A hatte x Thlr.; so hatte B deren $x + 12$, und es ist nach der Aufgabe

$$x \times (x + 12) \times (2x + 12) = 14560.$$

Daher $x^3 + 18x^2 + 72x - 7280 = 0$. F.

Da 7280 das letzte Glied dieser Gleichung viele Faktoren hat, so würde es der Versuche viel geben, x zu bestim-

men. Man setze daher $x = y + a$ und bestimme a willkührlich. Z. B. durch 1, so ist $x = y + 1$. Vergleicht man nun die Gleichung F mit D der Vorerinnerung; so ist

$A = 18$; $B = 72$; $C = -7280$. Daher

$a^3 + Aa^2 + Ba + C = -7189$

wo sich durch Hülfe einer Faktoren-Tafel leicht ausmachen läßt, daß die Faktoren von 7189 nur 1; 7; 13; 79; 91; 553; 1027 sind, daher sich unter diesen der Werth für y findet. Da nun $x = y + 1$; so findet sich der Werth für x unter den Zahlen 2; 8; 14; 80; 92; 554; 1028, wenn es überhaupt einen rationalen Werth für x giebt. Man braucht nur eine kleine Fertigkeit im Rechnen zu haben, um einzusehn, daß $x = 2$ oder $= 8$ die Gleichung F nicht auf 0 bringen könne, man versuche daher $x = 14$ zu setzen.

$$\begin{aligned} \text{Da nun}\quad x^3 &= 14^3 = 2744 \\ 18x^2 &= 18 \times 14^2 = 3528 \\ 72x &= 72 \times 14 = 1008, \end{aligned}$$

so ist $x^3 + 18x^2 + 72x = 7280$.

Folglich $x^3 + 18x^2 + 72x - 7280 = 0$

und $x = 14$.

Also $x + 12 = 26$.

Anmerk. Aus der Zeichenfolge der Gleichung F ersieht man, daß die beiden übrigen Werthe für x negativ seyn müssen, die in dem gegebenen Fall nicht Statt finden können.

Eine andere Auflösung.

Man setze in die Gleichung F $x = 2y$, so erhält man $8y^3 + 72y + 144y - 7280 = 0$. Diese Gleichung durch 8 dividirt, giebt

$$y^3 + 9y^2 + 18y - 910 = 0.$$

Die Faktoren des letzten Gliedes dieser Gleichung sind:

1; 2; 5; 7; 13; 14; 65; 70; 91; 182; 910.

1; 2; 5 bringen die Gleichung nicht auf 0, wohl aber 7. Daher $y = 7$, und folglich $x = 2y = 14$ wie vorhin.

252.

Zu einem Capital von 8240 Thaler legen nach der Aufgabe x Kaufleute $40x^2$ Thlr. Dadurch wird das ganze Capital $= 40x^2 + 8240$. Wenn nun der Gewinn $= G$, so ist nach der Aufgabe

$$100 : x = 40x^2 + 8240 : G.$$

$$\text{Daher } G = \frac{40x^3 + 8240x}{100} = \frac{2x^3 + 412}{5}.$$

Es ist aber nach der Aufg. $G = 10x^2 + 214$.

Folglich $2x^3 + 412x = 50x^2 + 1120$

und $x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$.

1. Aus der Zeichenfolge der Glieder ersieht man, daß die drei Wurzeln der Gleichung alle positiv sind.
2. Die drei gleich in die Augen fallende Faktoren des letzten Gliedes, deren Produkt das letzte Glied selbst ist, sind 7; 8; 10.
3. Sollen diese Faktoren auch die Wurzeln der Gleichung seyn, so müssen sie negativ genommen und addirt den Koefficienten des zweyten Gliedes geben. Dies thun sie.
4. Zum Ueberfluß kann man noch den Versuch machen, ob $(-7 \times -8) + (-7 \times -10) + (-8 \times -10)$ des dritten Gliedes Koefficienten geben. Da nun auch dies

der Fall ist; so sind 7; 8; 10 die Wurzeln der Gleichung $= x$.

253.

Die ältere Schwester sey x Jahre alt und geboren im Jahre A
» jüngere » » y » » » » » » a
so ist nach der Aufgabe

$$x^2 + x + 100 = A. \quad 1.$$

$$y^3 - y^2 + 380 = 2a. \quad 2.$$

$$a - A - 10 = y. \quad 3.$$

Nun ist $a - A = x - y$. 4.

Aus 3 und 4 folgt $x = 2y + 10$. 5.

Daher $x^2 = 4y^2 + 40y + 100$. 6.

Aus 1, 5 u. 6 folgt $8y^2 + 84y + 420 = 2A$. 7.

Aus 3 folgt $2y + 2A + 20 = 2a$. 8.

Aus 2 u. 8 folgt $y^3 - y^2 - 2y + 360 = 2A$. 9.

Aus 7 u. 9 folgt $y^3 - 9y^2 - 86y - 60 = 0$. 10.

Die Faktoren des letzten Gliedes der Gleichung 10, sind

1; 2; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60.

Aus 10 folgt $y^3 = 9y^2 + 86y + 60$

$y^3 > 9y^2$

$y > 9$.

Daher man nur nöthig hat, die Faktoren von 10 an zu versuchen. Von diesen bringt 15 die Gleichung auf 0.

Daher $y = 15$

Hieraus und aus der Gleichung 5 folgt $x = 40$.

Hieraus und aus der Gleichung 1 folgt $A = 1740$.

Hieraus und aus der Gleichung 4 folgt $a = 1765$.

254.

Im Faß sind x Stübchen Wein, und nach dem ersten Abzapfen $x - 4$ Stübchen Wein. Werden wieder vier Stübchen Wasser zugegossen; so hält das Faß x Stübchen Vermischung. Daher ist $x : x - 4 = 1$: zu dem Wein, der in einem Stübchen der Vermischung enthalten ist $= \frac{x - 4}{x}$.

Die vier Stübchen, welche also beim zweiten Abzapfen aus dem Fasse genommen werden, halten $\frac{4x - 16}{x}$ Wein.

Daher $(x-4) - \left(\frac{4x - 16}{x}\right) =$ dem Wein, der nach dem zweiten Abzapfen im Fasse bleibt.

$$= \frac{x^2 - 8x + 16}{x}.$$

Werden abermahl vier Stübchen Wasser zugegossen, so hat das Faß wiederum x Stübchen der Vermischung. Daher $x : \frac{x^2 - 8x + 16}{x} = 1$: zu dem Wein, der nun in Einem Stübchen der Vermischung enthalten ist $= \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2}$.

Die vier Stübchen, welche beim dritten Abzapfen aus dem Fasse komem, enthalten also $\frac{4x^2 - 32x + 64}{x^2}$ Wein.

Daher $\left(\frac{x^2 - 8x + 16}{x}\right) - \left(\frac{4x^2 - 32x + 64}{x^2}\right)$ = dem Wein, der nach dem dritten Abzapfen im Fasse bleibt

$$= \frac{x^3 - 12x^2 + 48x - 24}{x^2}.$$

Nach der Aufgabe sollen $2\frac{1}{2}$ Stübchen mehr Wasser als Wein im Fasse enthalten seyn. Es müssen also x Stübchen in zwei Theile getheilt werden, wovon der eine um $2\frac{1}{2}$ größer ist, als der andere. Es sey der eine Theil $= y$; hier der Wein also der andere $= y + 2\frac{1}{2}$; hier das Wasser;

so ist $x = y + y + 2\frac{1}{2} = \frac{4y + 5}{2}$.

Also $y = \frac{2x - 5}{4}$.

$$y + 2\tfrac{1}{2} = \frac{2x + 5}{4}.$$

Daher ist $\frac{x^3 - 12x^2 + 48x - 64}{x^2} + \frac{2x + 5}{4} = x$

$$2x^3 - 43x^2 + 192x - 256 = 0$$

und $x^3 - \frac{43x^2}{2} + 96x - 128 = 0.$

Multiplicirt man die Glieder durch 1; 2; 4; 8 und setzt y statt x; so entsteht

$$y^3 - 43y^2 + 384y - 1024 = 0.$$

Eine Gleichung, in der $y = 2x$.

Da das letzte Glied dieser Gleichung viele Faktoren hat, so bediene man sich der Methode in Nro. 251 und setze $y = z + a = z + 1$; so ist

$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 1 - 43 + 384 - 1024 = 682.$

Daher z nur = 1; 2; 11; 22; 31; 341; 682 seyn kann.

Es würde also seyn $y = 2; 3; 10; 23; 32; 342; 683$

$$x = 1; 5; 16; 171.$$

Da nun 16 die Zahl, welche die Gleichung, deren Wurzel $= x$, auf 0 bringt; so ist $x = 16$.

VII.

255.

A. Die Dicke der Mauer in Fußen sey $= x$.

Daher nach der Aufgabe die Höhe $= 3\frac{1}{2}x$

die Länge $= 17\frac{1}{2}x$.

Die Mauer ist also in Cubikfußen $= \frac{245}{4}x^3$.

Da ferner nach der Aufgabe jeder Cubikfuß x Thlr. kostet, die ganzen Kosten aber 980 Thlr. betragen; so ist

$$\frac{245\,x^4}{4} = 980.$$

Also $x^4 = \frac{3920}{245} = 16$.

Daher $x = 2 =$ der Dicke.

$3\frac{1}{2}x = 7 =$ der Höhe.

$17\frac{1}{2}x = 35 =$ der Länge.

256.

Wenn die Anzahl der Eimer $= x$; so ist nach der Aufgabe

$$(x^2 - 8025) \times (x^2 + 8025) = 419872000000.$$

Also $x^4 = 419936400625$

und $x = 805$.

257.

Es bekamen x Arbeitsleute täglich, nach der Aufgabe x^2 Groschen. Die Arbeitsleute arbeiten überhaupt $x^2 - 1$ Tage, und bekommen daher in dieser Zeit

$$x^2 \times (x^2 - 1) = x^4 - x^2 = 180 \times 36$$
$$= 6480.$$

Es sey $x^2 = y$ also $x^4 = y^2$; so ist

$$y^2 - y = 6480 \text{ und}$$
$$y = +\tfrac{1}{2} \mp \sqrt{(6480 + \tfrac{1}{4})}$$
$$= +\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{161}{2} = 81 = x^2.$$

Daher $x = 9$.

258.

Hat er x Pfund Thee der ersten Sorte und y Pfd. der andern, und er verkauft jedes Pfund der erstern um so viel Thaler, als er von der andern Pfund hat, so löset er xy Thlr.; verkauft er aber jede Sorte um so viel Thaler, als es Pfunde sind, so löset er aus der erstern Sorte x^2 und aus der andern y^2 Thaler. Daher nach der Aufgabe

$$xy = 98 \qquad \text{I.}$$

$$\text{und } x^2 + y^2 = 245 \qquad \text{II.}$$

Aus I folgt $y^2 = \dfrac{9604}{x^2}$ III.

Aus II und III folgt $x^2 + \dfrac{9604}{x^2} = 245$

$$x^4 = 245\,x^2 - 9604. \qquad \text{IV.}$$

Nun sey $x^4 = z^2$

also $x^2 = z$ V.

so folgt aus IV u. V $z^2 = 245\,z - 9604$.

Folglich ist $z = \frac{245}{2} \mp \sqrt{(-9604 \mp \frac{60025}{4})}$

$$= \frac{245 \mp 147}{2}$$

$$= 196 \text{ und } 49.$$

Aus V u. VI folgt $x = 14$ und 7

und aus I u. VII folgt $y = 7$ und 14.

Eine andere Auflösung.

Aus I u. II folgt $x^2 + 2xy + y^2 = 441$.

Daher $x + y = 21$. III.

Da nun nach der Aufgabe $xy = 98$,

so ist sie auf die Aufgabe unter Nro 226 zurückgeführt.

Aus II und III folgt $x^2 = 21x - 98$.

Daher $x = \frac{21 \mp 7}{2}$, wie zuvor.

Eine dritte Auflösung.

Aus I und II folgt $x^2 - 2xy + y^2 = 49$.

Daher $x - y = \mp 7$. III.

Aus II und III folgt $x^2 = 7x + 98$.

Daher $x = \frac{7 \mp 21}{2}$, wie zuvor.

Allgemeine Auflösung.

Es sey $xy = P$ I.

und $x^2 + y^2 = Q$ II.

so folgt aus I und II $x^2 + \frac{P^2}{x^2} = Q$

$$x^4 = Qx^2 - P^2.$$

Wenn nun $x^2 = z$

so ist $z^2 = Qz - P^2$

$$z = \frac{Q}{2} \mp \sqrt{\left(-P^2 + \frac{Q^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{Q \mp \sqrt{(Q^2 - 4P^2)}}{2} = x^2$$

Daher $x = \mp \sqrt{\left(\frac{Q \mp \sqrt{(Q^2 - 4P)}}{2}\right)}$

259.

B. A hat x; B $(x+1)$; C $(x+2)$ u. D $(x+3)$ Thlr.

Daher nach der Aufgabe

$x \times (x+1) \times (x+2) \times (x+3) - 176 = (\frac{176}{2})^2$.

Also $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 7920 = 0$.

Da nun $x^2 \angle 7920$

so ist $x \angle 10$.

Daher nur von den Faktoren des letzten Gliedes 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; und 9 zu versuchen sind.

Aus der Größe des letzten Gliedes erhellt, daß die ersten Faktoren die Gleichung nicht auf 0 bringen können. Dies giebt uns Gründe, die Versuche rückwärts und mit der 9 anzufangen, wo man bald darauf kommt, daß $x = 8$. Daher die vier Zahlen 8; 9; 10 und 11 sind.

Auch ist 8 nur die einzige positive Wurzel, wie aus der Folge der Zeichen der Glieder der Gleichung erhellt.

Eine andere Auflösung.

Die Aufgabe läßt sich auch durch zwei quadratische Gleichungen auflösen. Denn man setze $x(x+3) = y$ und $(x+1)(x+2) = z$, so ist

$z - y = 2$ I. Nun ist nach der Aufgabe $yz = 7920$ II. Also folgt aus I u. II $z^2 - 2z = 7920$

und $z = +1 \mp \sqrt{(7220+1)} = 90$

also aus I $y = 88$

oder $x^2 + 3x = 88$

und $x = -\frac{3}{2} \mp \sqrt{(88 + \frac{9}{4})} = -\frac{3}{2} + \frac{19}{2} = 8$

260.

Es sey die größere Zahl $= 7m$, die kleinere $= n$, so ist nach der Aufgabe $7m + n = 63$ I.

$$\frac{49m^2}{n} + \frac{81}{4} = (m-1)^3. \quad \text{II.}$$

Aus I und II folgt

$$\frac{49m^2}{63-7m}+\frac{81}{4}=m^3-3m^2+3m-1$$

$$\frac{7m^2}{9-m}+\frac{85}{4}=m^3-3m^2+3m$$

$$\frac{28m^2}{9-m}+85=4m^3-12m^2+12m$$

$$28m^2+765-85m=-4m^4+48m^3-120m^2+108m$$

$$4m^4-48m^3+148m^2-193m+765=0$$

$$m^4-12m^3+37m^2-\frac{193m}{4}+\frac{765}{4}=0$$

Man setze $m=\frac{z}{4}$ so ist

$$\frac{z^4}{256}-\frac{12z^3}{64}+\frac{37z^2}{16}-\frac{193z}{16}+\frac{765}{16}=0$$

Multiplicirt mit 256 giebt

$$z^4-48z^3+592z^2-3088z+765\times 64=0$$

Man setze nun $z=2v$, so erhält man

$$16v^4-384v^3+2368v^2-6176v+765\times 64=0$$

Dividirt durch 16 giebt

$$v^4-24v^3+148v^2-386v+3060=0 \qquad \text{III.}$$

Von den Faktoren des letzten Gliedes dieser Gleichung bringen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9 dieselbe nicht auf 0, wohl aber 10; daher $v=10$ eine Wurzel dieser Gleichung, also $z=2v=20$, und $m=\frac{z}{4}=5$, also $7m=35$ die größere Zahl, folglich die kleinere 28.

Dividirt man nun die Gleichung III durch $x-10$, so erhält man $v^3-14v^2+8v-306=0$. Die Faktoren des letzten Gliedes sind 1, 2, 3, 6, 9, 17, 18, 51, 102, 306. Die ersten 5 bringen, wie man schon gesehen, die Gleichung nicht auf 0; 17 auch nicht. Die übrigen braucht man gar nicht zu versuchen; denn aus I

folgt $m<9$, also $v<18$. Die Gleichung III hat daher keine andere positive rationale Wurzeln, weder in ganzen noch gebrochnen Zahlen.

261.

C. Sind die beiden Zahlen x u. y; so ist nach der Aufgabe

$$xy=36=P \qquad 1.$$

$$(x^2+y^2)\times(x+y)=1261=N \qquad 2.$$

Daher $x^3+y^2x+x^2y+y^3=N$. 3.

Aus 1 u. 3 folgt $x^6+Px^4-Nx^3+P^2x^2+P^3=0$.

Also $x^6+36x^4-1261x^3+1296x^2+46656=0$.

Da $x^6 \angle 1261x^3$.

Folglich $x \angle \sqrt[3]{1261}$

$\angle 11$.

Die Faktoren des letzten Gliedes aber sind 2, 3, 4, 6, 8, 12 rc.
so kommt man bald darauf, daß $x=4$
und hieraus und aus 1, daß $y=9$ sey.

Eine andere Auflösung.

Die Aufgabe läßt sich auch durch eine cubische Gleichung auflösen. Denn man setze $x+y=P$ I.

$x^2+y^2=Q$ II.

so folgt aus I $x^2+y^2+2xy=P^2$

Hieraus und aus II $2xy=P^2-Q$

Nun ist $2xy=72$ nach d. Aufg.

Daher $P^2-Q=72$ III.

und $PQ=1261$ n. d. A. IV.

Aus III und IV folgt $P^3-72P=1261=13\times 97$

$$P^3-72P-1261=0$$

wo P nur $=13$ seyn kann. Man hat daher $x+y=13$ und $xy=36$; also nach 226, $x=4$

$y=9$.

VIII.

262.

Wenn die eine Zahl $= x$; die andere $= y$; so ist $(x+y) + (x-y) = 12 = S$, um sogleich eine allgemeine Auflösung zu geben. Daher ist

$$2x = S$$

$$x = \frac{S}{2}$$

$y =$ jeder beliebigen Zahl.

Wenn also, wie hier, $S = 12$; so ist

$x =$	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	u.s.f.
$y =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	»
$x+y =$	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	»
$x-y =$	5,	4,	3,	2,	1,	0,	-1,	»
und $(x+y)+(x-y) =$	12,	12,	12,	12,	12,	12,	12,	»

263.

Nach der Aufgabe ist $x + y^2 = (x-y)^2$

$$= x^2 - 2xy + y^2.$$

Daher $x = x^2 - 2xy$,

$$1 = x - 2y$$

und $y = \dfrac{x-1}{2}$.

Soll nun y eine ganze Zahl werden, so muß x eine ungerade Zahl seyn. Wenn nun $x = 3, 5, 7, 9$ u. s. f.

so ist $y = 1, 2, 3, 4$ » » »

Anmerkung. Alle mit § bezeichnete Aufgaben findet man aufgelöset in Hellwigs Unbestimmte Analytik. Braunschweig 1803.

266.

Er kaufte x Ochsen und y Kühe.

Die Ochsen kosteten $24x$ Thlr. und die Kühe $16y$ Thlr.

Daher nach der Aufgabe $24x + 16y = 464$

$$3x + 2y = 58$$

$$y = 29x - \frac{x}{2}.$$

Setzt man nun $x = 2A$

so ist $y = 29 - 3A$.

Nimmt man	$A =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
so ist	$x =$	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	10,	18
und	$y =$	26,	23,	20,	17,	14,	11,	8,	5,	2.

$A > 9$ giebt y negativ.

267.

Die erste Bäuerin hatte $8x + 7$ Eier

» andere » » $10y + 7$ »

Nach der Aufgabe war

$$(8x+7) + (10y+7) = 100.$$

Daher $x = 10 - y + \dfrac{3-y}{4}$.

Man setze $y - 3 = 4m$;

so ist $y = 4m + 3$

und $x = 7 - 5m$.

Daher $8x + 7 = 63 - 40m$

und $10y + 7 = 40m + 37$.

Wenn also $m = 0, 1;$
so ist $8x + 7 = 63 - 40m = 63, 23$
und $10y + 7 = 40m + 37 = 37, 77.$
Mehrere Werthe finden nicht Statt. Denn setzt man $m = 2;$
so ist $8x + 7 = 63 - 40m = - 17.$

268.

Es sey die gesuchte Zahl $= N$; so ist nach der Aufgabe
$$N = 6x + 2 = 13y + 3.$$
Daher $$x = 2y + \frac{y + 1}{6}.$$
Wenn nun $y + 1 = 6m;$
so ist $N = 13y + 3 = 78m - 10.$
Nimmt man nun $m = 1, 2, 3$ u. s. f.
so ist $N = 78m - 10 = 68, 146, 224$ u. s. f.

271.

Werden gekauft x Pferde und y Ochsen; so kosten die Pferde nach der Aufgabe $31x$, und die Ochsen $21y$ Thlr. Daher
$$21y + 31x = 1770$$
$$y = 84 - x + \frac{2(3 - 5x)}{21}.$$
Wenn nun $5x - 3 = 21m;$
so ist $$x = 4m + \frac{m + 3}{5}.$$
Wenn ferner $m + 3 = 5n;$
so ist
$$x = 21n - 12$$
$$y = 102 - 31n$$
$$31x = 651n - 372$$
$$21y = 2142 - 651n.$$

Nimmt man nun $n = 1, 2, 3$
so ist $x = 9, 30, 51$
$y = 71, 40, 9$
$31x = 279, 930, 1581$
$21y = 1491, 840, 189.$

Da $n > 3$ angenommene y negativ giebt; so finden nicht mehrere Werthe für x und y Statt.

272.

Wenn die Anzahl der Pferde $= E$, und die der Ochsen $= B$; so sind nach der Aufgabe die Kosten der Pferde in Thlrn. $= 31E$.
» » » Ochsen $= 20B$.
und es ist $20B = 31E + 7.$

Also $$B = E + \frac{11E + 7}{20}. \qquad \text{I.}$$
Es sey $11E + 7 = 20F$
so ist $$E = F + \frac{9F - 7}{11}. \qquad \text{II.}$$
Ferner sey $9F - 7 = 11G$
so ist $$F = G + \frac{2G + 7}{9}. \qquad \text{III.}$$
Noch sey $2G + 7 = 9H$
so ist $$G = 4H - 3 + \frac{H - 1}{2} \qquad \text{IV.}$$
Endlich sey $H - 1 = 2I$
so ist $H = 2I + 1.$ V.
Aus IV u. V folgt $G = 9I + 1.$ VI.
Aus VI u. III folgt $F = 11I + 2.$ VII.
Aus VII u. II folgt $E = 20I + 3.$ VIII.
Aus VIII u. I folgt $B = 31I + 5.$

Nimmt man nun $I = 0, \; 1, \; 2, \; 3$ u. s. f.
so ist $E = 3, 23, 43, 63$ u. s. f.
und $B = 5, 36, 67, 98$ u. s. f.

273 a.

Nimmt man x Pistolen und y Dukaten, so ist nach der Aufgabe $5x + 3y = 100.$

Daher
$$3y = 100 - 5x$$
$$= 5\,(20 - x)$$
$$y = \frac{5\,(20 - x)}{3}$$

Es muß daher $\frac{20 - x}{3}$ eine ganze Zahl seyn,

also $20 - x = 3S$
so ist $x = 20 - 3S$ I.
$y = 5S$ II.

Aus I sieht man, daß $S < 7$.

Setzt man daher $S = 6, \; 5, \; 4, \; 3, \; 2, \; 1$
so wird $x = 2, \; 5, \; 8, 11, 14, 17$
$y = 30, 25, 20, 15, 10, \; 5$

274.

Es sey die gesuchte Zahl $= N$; so ist nach der Aufgabe
$$N = 39x + 16 = 56y + 27.$$

Daher $x = y + \frac{17y + 11}{39}.$

Setzt man nun $17y + 11 = 39A$
so ist $y = 2A + \frac{5A - 11}{17}.$

Setzt man ferner $5A - 11 = 17B$
so ist $A = 3B + 2 + \frac{2B + 1}{5}.$

Setzt man nun auch $2B + 1 = 5C$
so ist $B = 2C + \frac{C - 1}{2}.$

Setzt man endlich $C - 1 = 2D$
so ist $B = 5D + 2$
$A = 17D + 9$
$y = 39D + 20.$

Folglich $N = 56y + 27 = 2184D + 1147.$

Nimmt man nun $D = \; 0, \; 1, \; 2$ u. s. f.
so ist $N = 1147, 3331, 5515$ u. s. f.

276.

Es bekomme jedes Mitglied der aus 7 Personen bestehenden Familie x Thlr.; so bekommen alle 7 x Thlr. Ferner bekomme jedes Mitglied der aus 11 Personen bestehenden Familie y Thlr.; so bekommen alle 11 y Thlr. Daher ist nach der Aufgabe
$$7x + 11y = 100.$$

Also $x = 14 - y + \frac{2 - 4y}{7}.$ 1.

Nun sey $2y - 1 = 7z$
so ist $y = 3z + \frac{1 + z}{2}.$ 2.

Es sey daher ferner $1 + z = 2t$
so ist $z = 2t - 1.$ 3.

Aus 2 und 3 folgt $y = 7t - 3$
und aus 1 und 3 $x = 19 - 11t.$

Daher $11y = 77t - 33$
$7x = 133 - 77t$

Nimmt man $t = 0$, so wird y negativ

» » $t = 1$, » » $y = 4$, also $11y = 44$

und $x = 8$, also $7x = 56$

» » $t = 2$, so wird x negativ.

Daher nur $y = 4$ und $x = 8$ seyn kann.

277 a.

Bei dieser Aufgabe hat sich im Exempelbuche ein Fehler eingeschlichen. Es müssen nämlich die Worte «und endlich aus dem zweiten das im ersteren» weggestrichen werden, und die Auflösung ist demnach folgende:

Da im ersteren Fasse x im andern y Quartier, so ist nach der erstern Operation im ersten Fasse $x - y$,

im zweiten $2y$

nach der zweiten » im ersten $2x - 2y$,

im zweiten $2y - (x - y) = 3y - x$,

nach der dritten Operation im ersten Fasse

$$(2x - 2y) - (3y - x) = 3x - 5y$$

im zweiten Fasse $6y - 2x$.

Folglich nach der Aufgabe

$$3x - 5y = 6y - 2x$$
$$5x = 11y$$
$$x = \frac{11y}{5} = 2y + \frac{y}{5}.$$

Man setze $y = 5S$

so ist $x = 11S$.

Da man nun für S jede Zahl setzen kann, so gehen die Auflösungen bis ins Unendliche.

Nimmt man daher $S = 1, 2, 3$ u. s. f.

so wird $x = 11, 22, 33$ u. s. f.

$y = 5, 10, 15$ u. s. f.

IX.

285.

Nach der Aufg. ist $M + F + I = 20$ I.

und $12M + 5F + 3I = 144$ II.

Aus I folgt $5M + 5F + 5I = 100$. III.

Aus II u. III folgt $7M - 2I = 44$

und $M = 6 + \frac{2(I+1)}{7}$ IV.

Setzt man $I + 1 = 7A$

so ist $I = 7A - 1$. V.

Aus IV und V folgt $M = 6 + 2A$ VI.

und aus I, V u. VI folgt $F = 15 - 9A$.

Nimmt man nun $A = 1$

so ist $I = 6$

$M = 8$

$F = 6$

und da $A = 2$; F negativ geben würde; so finden weiter keine Auflösungen Statt.

286.

Nach der Aufg. ist $x + y + z = 30$ I.

$14x + 11y + 9z = 360$. II.

Aus I folgt $11x + 11y + 11z = 330$. III.

Aus II u. III folgt $3x - 2z = 30$.

Daher $x = 10 + \frac{2z}{3}$.

Setzt man $z = 3u$ IV.
so ist $x = 10 + 2u.$ V.
Aus I, IV und V folgt $y = 20 - 5u.$
Nimmt man daher $u = 1,\ 2,\ 3$
so ist $z = 3,\ 6,\ 9$
$x = 12,\ 14,\ 16$
$y = 15,\ 10,\ 5$

$u > 3$ würde y negativ geben; daher mehrere Auflösungen nicht Statt finden.

Anmerk. Im Exempelbuche muß es statt «jedes 1 Mark schwer» jedes 10 Mark heißen.

287.

Wenn x, y und z die drei Theile von 120 sind; so ist
nach der Aufgabe $x + y + z = 120$ I.
und $6x + 5y + 4z = 560.$ II.
Aus I folgt $4x + 4y + 4z = 480.$ III.
Aus II und III folgt $2x + y = 60.$
Also $y = 2\ (30 - x).$
Wenn nun $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ u. s. f.
so ist $y = 78,\ 76,\ 74,\ 72,\ 70$ u. s. f.
$z = 41,\ 42,\ 43,\ 44,\ 45$ u. s. f.

289.

Es seyen x Kühe, y Kälber und y Hammel,
so ist $x + y + z = 10$ I.
$10x + 2y + 3z = 30$ II.
Aus I folgt $3x + 3y + 3z = 30$ III.
Aus II und III $7x - y = 0$
also $7x = y$ IV.

Aus I und IV $8x + z = 10$
also $z = 10 - 8x$
Folglich $8x < 10$
$x < \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$
Daher x nur $= 1$ seyn kann.
also $y = 7x = 7$
und $z = 2.$

also 1 Kuh,
7 Kälber,
2 Hammel. So muß die Antwort heißen, und nicht, wie im Exempelbuche aus Versehen abgedruckt ist.

290.

Wenn die Anzahl der Kühe $= x$, die der Schaafe $= y$, die der Schweine $= z$; so kosten nach der Aufgabe die Kühe $10x$ Thlr., die Schaafe $3y$ Thlr., die Schweine $\frac{1}{2}z$ Thlr.

Daher $x + y + z = 100$ I.
und $10x + 3y + \frac{1}{2}z = 100.$ II.
Aus II folgt $20x + 6y + z = 200.$ III.
Aus I u. III folgt $19x + 5y = 100.$

Also ist $y = 20 - 3x - \dfrac{4x}{5}$

Setzt man $x = 5p$; so ist
$y = 20 - 19p.$

Daher p nur $= 1$ seyn kann. Folglich ist
$x = 5;\ y = 1;\ z = 94$ deren Summe $= 100.$
$10x = 50;\ 3y = 3;\ \frac{1}{2}z = 47$ » » $= 100.$

X.

309.

Namen der Knaben	I. Hatten anfänglich Nüsse	II. Hatten, nachdem D mitgetheilt hatte	III. Hatten, nachdem C mitgetheilt hatte.	IV. Hatten, nachdem B mitgetheilt hatte	V. Hatten, nachdem A mitgetheilt hatte	
D	w	w—x—y—z	2w—2x—2y—2z	4w—4x—4y—4z	8w—8x—8y—8z	E.
C	x	2x	3x — w — y — z	6x—2w—2y—2z	12x—4w—4y—4z	F.
B	y	2y	4y	7y — w — x — z	14y—2w—2x—2z	G.
A	z	2z	4z	8z	15z — w — x — y	H.

Im Zustande V haben A; B; C; D gleichviel. Daher folgt

aus E und F $3w - y - z = 5x$ I.

» E » G $5w - 11y - 3z = 3x$ K.

» E » H $9w - 23z - 7y = 7x$ L.

» I » K $4w = 13y + 3z$ M.

aus I und L $6w = 27z + 7y$ N.

» M » N $5y = 9z$ O.

und $y = z + \frac{4z}{5}.$

Es sey $z = 5m$ P.

so ist $y = 9m$ Q.

Aus P, Q und M folgt $w = 33m$ R.

und aus I, P, Q und R folgt $x = 17m.$

Nimmt man nun $m = 1,\ 2,\ 3$ u. s. f.

so ist $w = 33,\ 66,\ 99$ » » »

$x = 17,\ 34,\ 51$ » » »

$y = 9,\ 18,\ 27$ » » »

$z = 5,\ 10,\ 15$ » » »

Wendet man hier aber das an, was oben, Nro 175 Anmerk. 2 gesagt worden, so läßt sich die Aufgabe weit leichter auflösen; denn man hat hier sogleich, wenn man das, was ein jeder nach der letzten Mittheilung hat $= H$, und das, was alle zusammen haben $= S$ setzt, folgende vier Gleichungen.

$$16w - 8S = H$$
$$16x - 4S = H$$
$$16y - 2S = H$$
$$16z - S = H$$

Aus jeder dieser Gleichungen folgt, daß H eine durch 16 theilbare Zahl seyn muß. Aus der ersten z. B. folgt $w = 8S + \frac{H}{16}$. Setzt man daher $H = 16m$, so ist $S = 4H = 64m$. Substituirt man diese Werthe von H und S in die vier Gleichungen, so erhält man

$16w - 8 \times 64m = 16m.$ Daher $w = 33m$
$16x - 4 \times 64m = 16m.$ » $x = 17m$
$16y - 2 \times 64m = 16m.$ » $y = 9m$
$16z - 64m = 16m.$ » $z = 5m$

wie vorhin, wo man $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ u. s. w. nehmen kann.

310.

Ist mit der vorigen einerlei, nur daß hier fünf Personen vorhanden sind, also in den Gleichungen von 175, Anmerk. 2, $n = 5$, und man hat daher folgende fünf Gleichungen:

$32v - 16S = H$
$32w - 8S = H$
$32x - 4S = H$
$32y - 2S = H$
$32z - S = H$

Woraus man eben so, wie bei der vorigen Aufgabe schließt, daß H eine durch 32 theilbare Zahl seyn muß, oder $H = 32m$, und $S = 5H = 160m$ seyn muß.

Setzt man nun diese Werthe von H und S in die fünf Gleichungen, so folgt

aus der ersten $v = 81m$
» » zweiten $w = 41m$
» » dritten $x = 21m$
» » vierten $y = 11m$
» » fünften $z = 6m.$

Nimmt man nun	$m =$	1,	2,	3	u. s. f.
so ist	$v =$	81,	162,	243	»
	$w =$	41,	82,	123	»
	$x =$	21,	42,	63	»
	$y =$	11,	22,	33	»
	$z =$	6,	12,	18	»
	$H =$	32,	64,	96	»

311.

Wenn die Anzahl der Nüsse $= N$; so ist nach der Aufgabe

$$N = 2p + 1 = 3q + 2 = 4r + 3 = 5s + 4 = 6t + 5.$$

Aus $2p + 1 = 3q + 2$ folgt

$$p = q + \frac{q+1}{2}.$$

Man setze nun

$q + 1 = 2m$ so ist
$p = 3m - 1.$
Also $N = 6m - 1.$

Nimmt man nun $m = 1, 2, 3$ u. s. f. Zahlen, so ist $N = 6m - 1 = 5, 11, 17$ u. s. f. welche die beiden erstern Bedingungen der Aufgaben erfüllen, die übrigen aber nicht. Man entwickele daher

$$4r + 3 = 6m - 1$$

so ist $r = -1 + \frac{m}{2}.$

Setzt man $m = 2n$; so ist
$N = 6m - 1 = 12n - 1$

Nimmt man nun $n = 1, 2, 8$ u. s. f.
so ist $N = 12n - 1 = 11, 23, 35$ u. s. f.
welche Zahlen die drei ersten und die letzte Bedingung erfüllen, aber nicht die vierte. Damit auch dies geschehe, entwickele man die Gleichung

$12n - 1 = 5s + 4$ so ist

$$s = 2n - 1 + \frac{2n}{5}.$$

Man setze daher $n = 5u$, so ist
$N = 12n - 1 = 60u - 1.$

Nimmt man nun $u = 1, 2, 3$ u. s. f.
so ist $N = 60u - 1 = 59, 119, 179$ u. s. f.
welche Zahlen allen Bedingungen ein Genüge leisten.

312.

Wenn die Anzahl der Soldaten $= N$; so ist nach der Aufgabe

$$N = 5v + 1 = 7w + 6 = 8x + 1$$
$$= 9y + 5 = 11z + 8.$$

Aus $5v + 1 = 7w + 6$ folgt

$$v = w + 1 + \frac{2w}{5}$$

und wenn $w = 5m$

so ist $N = 7w + 6 = 35m + 6.$

Folglich $8x + 1 = 35m + 6$

$$x = 4m + \frac{3m + 5}{8}.$$

Es sey $3m + 5 = 8n$

so ist $m = 2n - 1 + \frac{2n - 2}{3}.$

Ferner sey $n - 1 = 3p$

so ist $m = 8p + 1.$

Folglich $N = 35m + 6 = 280p + 41.$

Daher auch $9y + 5 = 280p + 41$

und $y = 31p + 4 + \frac{p}{9}.$

Nun sey $p = 9q$

so ist $N = 280p + 41 = 2520q + 41.$

Folglich $11z + 8 = 2520q + 41.$

Daher $z = 229z + 3 + \frac{q}{11}.$

Nun sey $q = 11r$

so ist $N = 2520q + 41 = 27720r + 41.$

Nimmt man nun $r = 0, \quad 1, \quad 2$ u. s. f.

so ist $N = 27720r + 41 = 41, 27761, 55481$ u. s. f.

313.

Wenn die Anzahl der Dukaten $= N$; so ist nach der Aufgabe
$N = 3v + 1 = 9w + 1 = 11x + 1 = 7y + 2 = 12z + 4.$
Da eine Zahl mit der zweiten Eigenschaft auch nothwendig die erstere haben muß; so kann man die Gleichung $3v + 1 = 9w + 1$ unentwickelt lassen, und sogleich zur Entwickelung der Gleichung $9w + 1 = 11x + 1$ übergehn.

Aus ihr folgt $w = x + \frac{2x}{9}.$

Setzt man $x = 9m$;

so ist $N = 11x + 1 = 99m + 1$

Daher $7y + 2 = 99m + 1$

und $y = 14m + \frac{m - 1}{7}.$

Setzt man $m - 1 = 7n$

also $m = 7n + 1$;

so ist $N = 99m + 1 = 693n + 100.$

Daher $12z + 4 = 693n + 100$

und $z = 57n + 8 + \frac{3n}{4}.$

Setzt man $n = 4q$;

so ist $N = 693n + 100 = 2772q + 100.$

Nimmt man nun $q = 0, \quad 1, \quad 2$ u. s. f.

so ist $N = 2772q + 100 = 100, 2872, 5644$ u. s. f.

314.

Es sey die Anzahl der Schaafe $= N$; so ist nach der Aufgabe
$N = 5t + 2 = 6u + 3 = 7v + 4 = 8w + 5 = 9x.$

Aus $5t + 2 = 6u + 3$ folgt

$$t = u + \frac{u + 1}{5}.$$

Setzt man $u + 1 = 5m$; so ist

$$N = 6u + 3 = 30 - 3.$$

und da auch $N = 7v + 4$;

so ist $7v + 4 = 30m - 3$

$$v = 4m - 1 + \frac{2m}{7}.$$

Setzt man $m = 7n$; so ist

$$N = 30m - 3 = 210n - 3$$

und da auch $N = 8w + 5$;

so ist $8w + 5 = 210n - 3$

$$w = 26n - 1 + \frac{n}{4}.$$

Setzt man $n = 4p$; so ist

$$N = 210n - 3 = 840p - 3.$$

Endlich war auch $N = 9x.$

Daher $9x = 840p - 3$

$$x = 93p + \frac{p - 1}{3}.$$

Setzt man $p - 1 = 3q.$

Also $p = 3q + 1$; so ist

$$N = 840p - 3 = 2520q + 837.$$

Nimmt man also $q = 0, 1, 2$ u. s. f.

so ist $N = 837, 3357, 5877$ u. s. f.

315.

Der erste Student hatte v Mark.
» zweite » » w »
» dritte » » x »
» vierte » » y »
» fünfte » » z »
Verzehrt hatten sie S »

Daher nach der Aufgabe

$$v + \frac{w + x + y + z}{5} = S \qquad \text{I.}$$

$$w + \frac{v + x + y + z}{7} = S \qquad \text{II.}$$

$$x + \frac{v + w + y + z}{9} = S \qquad \text{III.}$$

$$y + \frac{v + w + x + z}{11} = S \qquad \text{IV.}$$

$$z + \frac{v + w + x + y}{13} = S \qquad \text{V.}$$

Aus I und II folgt $15v + x + y + z = 14w$ VI.
» I » III » $9x - 10v - y - z = w$ VII.
» I » IV » $22y - 25v - 3x - 3z = 3w$ VIII.
» I » V » $13z - 15v - 2x - 2y = 2w$ IX.
» VI » VII » $25x - 31v - 3z = 3y$ X.
» VI » VIII » $9x + 79v + 9z = 61y$ XI.
» VI » IX » $6z - 8v - x = y$ XII.
» X » XII » $4x - v = 32$ XIII.
» XI » XII » $51z = 10x + 81v$ XIV.
» XIII » XIV » $29x = 49v$ XV.

Also $x = v + \frac{20v}{29}.$

Setzt man $v = 29m$ XVI.

so ist $x = 49m$ XVII.

Aus XIII, XVI, XVII folgt $3z = 167m$

$$z = 55m + \frac{2m}{3} \qquad \text{XVIII.}$$

Setzt man	$m = 3n$	XIX.
so folgt aus XVIII und XIX	$z = 167n$	XX.
» XVII » XIX	$x = 147n$	XXI.
» XVI » XIX	$v = 87n$	XXII.
Aus XII, XX, XXI, XXII folgt	$y = 159n$	XXIII.
» VII, XX, XXII, XXIII »	$w = 127n$	XXIV.
» I, XX, XXI, XXII, XXIII, XXIV »	$S = 207n$	XXV.

Nimmt man also	$n = 1, 2, 3, 4$	u. s. f.
so folgt aus XXII	$v = 87, 174, 261, 348$	»
» XXIV	$w = 127, 254, 381, 508$	»
» XXI	$x = 147, 294, 441, 588$	»
» XXIII	$y = 159, 318, 477, 636$	»
» XX	$z = 167, 334, 501, 668$	»
» XV	$S = 207, 414, 621, 828$	»

316.

Wenn die Anzahl der Eier $= N$
» » » » Halbdutzend $= p$
» » » » Halbstiegen $= q$
» » » » Dutzend $= r$
» » » » Mandeln $= S$
» » » » Stiegen $= w$

so ist nach der Aufgabe

$$6p + 5 = 10q + 5 = 12r + 5 = 15S + 5$$
$$= 60t + 5 = 20w + 5 = N.$$

Aus der Gleichung $6p + 5 = 10q + 5$ folgt

$$3p = 5q$$

$$p = q + \frac{2q}{3} \text{ setzt man}$$

$$q = 3u \text{ so ist}$$

$$p = 5u.$$

Folglich $N = 30u + 5.$

Nimmt man nun $u = 1, 2, 3$ u. s. f.
so wird $N = 30u + 5 = 35, 65, 95$ u. s. f., welche Zahlen aber nur den beiden erstern Bedingungen ein Genüge leisten, nämlich daß 5 übrig bleiben, wenn die Eier bei halben Dutzenden und bei halben Stiegen gezählt werden. Sollen sie auch der dritten Bedingung ein Genüge leisten, so setze man, die erhaltene Gleichung

$$30u + 5 = 12r + 5 \text{ und es ist}$$

$$2r = 5u$$

$$r = 2u + \frac{u}{2}.$$

Es sey $u = 2v$ so ist
$r = 5v.$

Folglich $N = 12r + 5 = 60v + 5.$

Nimmt man nun $v = 1, 2, 3$ u. s. f.
so wird $N = 60v + 5 = 65, 125, 185$ u. s. f., welche Zahlen nun den drei erstern Bedingungen ein Genüge leisten müssen. Da diese Zahlen auch die übrigen Bedingungen erfüllen, so hat man nicht nöthig die Gleichung $60v + 5 = 15S + 5$ zu entwickeln, welches sonst so lange geschehen müste, bis die Zahlen alle Eigenschaften erhalten hätten.

XI.

318.

Er hatte von der besten Sorte x Stübchen, welche $24x$ Ggr. kosteten
von der mittlern » y » » $18y$ »
von der schlechtern » z » » $12z$ »

Die Kosten aller Sorten betrugen daher vor der Vermischung
$$24x + 18y + 12z$$
nach der Vermischung $15\,(x + y + z)$.

Daher $24x + 18y + 12z = 15\,(x + y + z)$.

Folglich ist $z = 3x + y$.

Nimmt man also $y = 1,\ 1,\ 1$ u. s. f.
und $x = 1,\ 2,\ 3$ »
so ist $z = 4,\ 7,\ 10$ »
Daher $x + y + z = 6,\ 10,\ 14$ »

Zur Vermischung muß also genommen werden
von der besten Sorte $\frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{14}$ u. s. f.
» » mittlern » $\frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{14}$ »
» » schlechtern » $\frac{2}{3},\ \frac{7}{10},\ \frac{5}{7}$ »

Nimmt man $y = 2,\ 2,\ 2$ »
und $x = 1,\ 2,\ 3$ »
so ist $z = 5,\ 8,\ 11$ »
Daher $x + y + z = 8,\ 12,\ 16$ »

Zur Vermischung muß also genommen werden
von der besten Sorte $\frac{1}{8},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{16}$ u. s. f.
» » mittlern » $\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{8}$ »
» » schlechtern » $\frac{5}{8},\ \frac{2}{3},\ \frac{11}{16}$ »

Aus diesen Auflösungen ersieht man, wie man noch mehrere Verhältnisse bestimmen könne.

XII.

323.

Wenn w, x, y und z die vier Theile von 100 sind, so ist nach der Aufgabe
$$w + x + y + z = 100 \qquad \text{I.}$$
und $$9w + 7x + 5y + 3z = 702 \qquad \text{II.}$$

Aus I folgt $7w + 7x + 7y + 7z = 700$

Daher $2w - 2y - 4z = 2$
und $w = 1 + y + 2z$

Nimmt man nun $y = 1,\ 1,\ 1,\ 1$ u. s. f.
und $z = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ »
so ist $w = 4,\ 6,\ 8,\ 10$ »
und $x = 94,\ 91,\ 88,\ 85$ »

Nimmt man $y = 2,\ 2,\ 2,\ 2$ u. s. f. bis 2
und $z = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ » bis 47
so ist $w = 5,\ 7,\ 9,\ 11$ » bis 50
und $x = 92,\ 89,\ 86,\ 83$ » bis 2

Nimmt man $y = 3,\ 3,\ 3,\ 3$ u. s. f.
und $z = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ »
so ist $w = 6,\ 8,\ 10,\ 12$ »
und $x = 90,\ 87,\ 84,\ 81$ »

Nimmt man $y = 4,\ 4,\ 4,\ 4$ »
und $z = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ »
so ist $w = 7,\ 9,\ 11,\ 13$ »
und $x = 88,\ 85,\ 82,\ 79$ »

Auf eine ähnliche Art sucht man die übrigen Werthe.

324.

Der Kaufmann will kaufen S Pfund Safran, welche kosten 10S Thlr.

Z Pfd. Zimmet, welche kosten		$5Z$ »
T Pfd. Thee	» »	T »
C Pfd. Kaffee	» »	$\frac{1}{2}C$ »

Daher nach d. Aufg. $10S + 5Z + T + \frac{1}{2}C = 100$ I.

und $S + Z + T + C = 100.$ II.

Aus 1 folgt $20S + 10Z + 2T + C = 200.$ III.

Aus II und III folgt $19S + 9Z + T = 100.$

Folglich ist $T = 100 - 19S - 9Z$ und

$C = 18S + 8Z.$

Nimmt man nun	$S =$	1,	1,	1,	1	u. s. f.
und	$Z =$	1,	2,	3,	4	»
so ist	$T =$	72,	63,	54,	45	»
	$C =$	26,	34,	42,	50	»
Summe	$=$	100,	100,	100,	100	»
und	$10S =$	10,	10,	10,	10	»
	$5Z =$	5,	10,	15,	20	»
	$T =$	72,	63,	54,	45	»
	$\frac{1}{2}C =$	13,	17,	21,	25	»
Summe	$=$	100,	100,	100,	100	»
Nimmt man	$S =$	2,	2,	2,	2	»
und	$Z =$	1,	2,	3,	4	»
so ist	$T =$	53,	44,	35,	26	»
	$C =$	44,	52,	60,	68	»
Summe	$=$	100,	100,	100,	100	»
und	$10S =$	20,	20,	20,	20	»
	$5Z =$	5,	10,	15,	20	»
	$T =$	53,	44,	35,	26	»
	$C =$	22,	26,	30,	34	»
Summe	$=$	100,	100,	100,	100	»

u. s. w.

325.

Wenn die Anzahl der Gänse $= G$, der Hühner $= H$, der Enten $= E$, der Tauben $= T$; so kosten die Gänse $10G$, die Hühner $6H$, die Enten $4E$ und die Tauben $2T$ Gr. Daher nach der Aufgabe

$G + H + E + T = 140$ I.

und $10G + 6H + 4E + 2T = 960.$ II.

Aus I folgt $6G + 6H + 6E + 6T = 840.$ III.

Aus II u. III folgt $4G - 2E - 4T = 120$

und $G = 30 + T + \frac{E}{2}.$

Setzt man $E = 2A$ IV.

so ist $G = 30 + T + A.$ V.

Aus I, IV und V folgt $H = 110 - 2T - 2A.$

Nimmt man nun	$A =$	1,	1,	1	u. s. f.
und	$T =$	1,	2,	3	»
so ist	$H =$	105,	103,	101	»
	$G =$	32,	33,	34	»
	$E =$	2,	2,	2	»
Nimmt man	$A =$	2,	2,	2	»
und	$T =$	1,	2,	3	»
so ist	$H =$	102,	100,	98	»
	$G =$	33,	34,	35	»
	$E =$	4,	4,	4	»
Nimmt man	$A =$	3,	3,	3	»
	$T =$	1,	2,	3	»
so ist	$H =$	99,	97,	95	»
	$G =$	34,	35,	36	»
	$E =$	6,	6,	6	»

u. s. w.

236.

Es sey der Werth der Uhren der Ordnung nach in Thlrn. $= v, w, x, y, z$, und der Werth des Ringes $= R$; so ist nach der Aufg.

$v + R : w = 2 : 1$ I.

$w + R : x = 5 : 2$ II.

$x + R : y = 4 : 1$ III.

$y + R : z = 5 : 8$ IV.

Daher aus I $R = 2w - v$ V.

» II $R = \frac{5x}{2} - w$ VI.

» III $R = 4y - x$ VII.

» IV $R = \frac{5z}{8} - y$ VIII.

Aus V und VI folgt $w = \frac{5x}{6} + \frac{v}{3}$.

Setzt man nun $x = 6C$ IX.

und $v = 3D$ X.

so ist $w = 5C + D$ XI.

und $R = 2w - v = 10C - D$.

Da nun auch aus VII $R = 4y - x$.

Also $4y - x = 10C - D$

so ist $y = 4C - \frac{D}{4}$.

Setzt man nun auch $D = 4E$ XII.

so ist $y = 4C - E$ XIII.

und $R = 4y - x = 16C - 4E - x$ XIV.

Aus IX und XI folgt $R = 10C - 4E$. XV.

Da nun endlich aus VIII f. $R = \frac{5z}{8} - y$

und aus XIII folgt $R = \frac{5z}{8} - 4C + E$ XVI.

so folgt aus XV u. XVI $z = 22C - 8E + \frac{2C}{5}$.

Setzt man $C = 5F$ XVII.

so ist $z = 112F - 8E$.

Aus XVII u. XIII folgt $y = 20F - E$.

Aus XVII u. XV folgt $R = 50F - 4E$.

Aus XI, XII u. XVII f. $w = 25F + 4E$.

Aus IX u. XVII folgt $x = 30F$.

Aus X und XII folgt $v = 12E$.

Nimmt man nun	$E =$	1,	1,	1	u. s. f.
und	$F =$	1,	2,	3	»
so ist	$v =$	12,	12,	12	»
	$w =$	29,	54,	79	»
	$x =$	30,	60,	90	»
	$y =$	19,	39,	59	»
	$z =$	104,	216,	328	»
	$R =$	46,	96,	146	»

Nimmt man	$E =$	2,	2,	2	»
und	$F =$	1,	2,	3	»
so ist	$v =$	24,	24,	24	»
	$w =$	33,	58,	83	»
	$x =$	30,	60,	90	»
	$y =$	18,	38,	58	»
	$z =$	96,	208,	320	»
	$R =$	42,	92,	142	»

Hieraus ersieht man, wie alle übrigen Werthe der Größen zu erhalten sind.

XIII.

328.

Nach der Aufgabe ist $x\ (y + 1) = 77 = S.$

Daher $x = \frac{S}{y + 1}.$

Soll nun x eine ganze Zahl werden, so ist $y + 1$ ein Faktor von S, welches durch FS ausgedrückt seyn mag. Wenn also, wie hier,

$$S = 77,\ 77,\ 77,\ 77,$$

so ist $FS = y + 1 = \ 1,\ 7,\ 11,\ 77,$

$$y = \ 0,\ 6,\ 10,\ 76.$$

und $\frac{S}{y + 1} = x = 77,\ 11,\ \ 7,\ \ 1.$

Daher sind die beiden Zahlen 6 u. 11; 10 u. 7; 76 u. 1.

Eine andere Auflösung.

Es ist $y = \frac{S}{x} - 1.$

Daher $FS = x = \ 1,\ \ 7,\ 11,\ 77.$

Und da $S = 77,\ 77,\ 77,\ 77.$

So ist $\frac{S}{x} - 1 = y = 76,\ 10,\ \ 6,\ \ 0$ wie zuvor.

330.

Es ist $3x\ (y - 1) = 12.$

Folglich $y = \frac{4}{x} + 1.$

Daher $F4 = x = 1,\ 2,\ 4$

und $\frac{4}{x} + 1 = y = 5,\ 3,\ 2.$

331.

Da nach der Aufg $3x\ (y - 1) = 16$; so ist

$$y = \left(\frac{16}{x} : 3\right) + 1.$$

Daher $F16 = x = \ 1,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 8,\ \ 16.$

$$\left(\frac{16}{x} : 3\right) + 1 = y = \tfrac{19}{3},\ \tfrac{11}{3},\ \tfrac{7}{3},\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{4}{3}.$$

Eine Aufgabe, deren zu suchende Größen nicht beide durch ganze Zahlen bestimmt werden können.

337.

Nach der Aufg. ist $xy + x + y = 29 = S.$

Daher $S - y = x + xy = x\ (1 + y).$

Folglich $x = \frac{S - y}{1 + y} = -1 + \frac{S + 1}{y + 1}.$

Soll nun x eine ganze Zahl werden; so ist $y + 1$ ein Faktor von $S + 1$, welches durch $F\ (S + 1)$ ausgedrückt seyn mag. Wenn also, wie hier, $S = 29$; so ist

$$S + 1 = 30,\ 30,\ 30,\ 30,\ 30,\ 30,\ 30,\ 30$$

$F(S + 1) = y + 1 = \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 6,\ 10,\ 15,\ 30$

Also $y = \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 9,\ 14,\ 29$

und $\frac{S - 1}{y + 1} = x = 29,\ 14,\ \ 9,\ \ 5,\ \ 4,\ \ 2,\ \ 1,\ \ 0.$

Daher sind die beiden Zahlen 1 und 14; 2 und 9; 4 und 5.

338.

Nach der Aufgabe ist $xy + (x - y) = 26 = S.$

Daher $S + y = xy + x = x\ (y + 1).$

Also $x = \frac{S + y}{y + 2} = 1 + \frac{S - 1.}{y + 1}$

Soll nun x eine ganze Zahl werden; so ist $y + 1$ ein Faktor von $S - 1 = F(S - 1)$. Wenn daher, wie hier, $S = 26$; so ist

$$S - 1 = 25,\ 25,\ 25.$$
$$F(S - 1) = y + 1 = 1,\ 5,\ 25.$$
$$y = 0,\ 4,\ 24.$$

und $$1 + \frac{S - 1}{y + 1} = x = 26,\ 6,\ 2.$$

Daher sind die beiden Zahlen 4 und 6; 24 und 2.

339.

Nach der Aufgabe ist $xy - (x + y) = 11 = S$.

Daher $$S + y = xy - x = x(y - 1)$$

und $$x = \frac{S + y}{y - 1} = 1 + \frac{S + 1}{y - 1}.$$

Soll x eine ganze Zahl werden; so muß $y - 1$ ein Faktor von $S + 1 = F(S + 1)$ seyn. Wenn also, wie im vorliegenden Fall, $S = 11$; so ist

$$S + 1 = 12,\ 12,\ 12,\ 12,\ 12,\ 12.$$
$$F(S + 1) = y - 1 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12.$$
$$y = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 13.$$

Also $$1 + \frac{S + 1}{y - 1} = x = 13,\ 7,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2.$$

Daher sind die beiden Zahlen 2 und 13; 3 und 7; 4 und 5.

XIV.

349.

Nach der Aufg. ist $\frac{x}{y} + (x + y) = 19 = S$.

Daher $$xy + y^2 + x = Sy$$
$$Sy - y^2 = xy + x = x(y + 1).$$

Folglich $$x = \frac{Sy - y^2}{y + 1} = \frac{S - y}{y + 1} \times y$$
$$= \left(-1 + \frac{S + 1}{y + 1}\right) y$$

Soll x eine ganze Zahl werden; so ist $y + 1$ ein Faktor von $S + 1 = F(S + 1)$. Wenn daher, wie hier, $S = 19$; so ist

$$S + 1 = 20, 20, 20, 20, 20, 20.$$
$$F(S + 1) = y + 1 = 1,\ 2,\ 4,\ 5, 10, 20.$$
$$y = 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 9, 19.$$

und $$\left(-1 + \frac{S + 1}{y + 1}\right) y = x = 0,\ 9, 12, 12,\ 9,\ 0.$$

Daher sind die beiden Zahlen 1 und 9; 3 und 12; 4 und 12; 9 und 9.

350.

Nach der Aufgabe ist

$$\frac{x}{y} + (x - y) = 15 = S.$$

Daher $$xy - y^2 + x = Sy$$
$$Sy + y^2 = xy + x = x(y + 1)$$
$$x = \frac{Sy + y^2}{y + 1} = \frac{S + y}{y + 1} \times y$$
$$= \left(1 + \frac{S - 1}{y + 1}\right) y.$$

Soll x eine ganze Zahl werden; so ist $y + 1$ ein Faktor von $S - 1 = F(S - 1)$. Wenn nun, wie hier, $S = 15$.

$$\text{so ist} \quad S - 1 = 14,\ 14,\ 14,\ 14.$$
$$F(S - 1) = y + 1 = 1,\ 2,\ 7,\ 14.$$
$$y = 0,\ 1,\ 6,\ 13$$
$$\text{und} \quad \left\{1 + \frac{S-1}{y+1}\right\} y = x = 0,\ 8,\ 18,\ 26$$

Daher sind die beiden Zahlen 8 und 1; 18 und 6; 26 u. 13.

351.

Nach der Aufg. ist $(x + y) - \frac{x}{y} = 13 = S$.

Daher $Sy - y^2 = xy - x = x(y - 1)$

$$\text{und} \quad x = \frac{Sy - y^2}{y - 1} = \frac{S - y}{y - 1} \times y$$
$$= \left\{-1 + \frac{S-1}{y-1}\right\} y.$$

Soll x eine ganze Zahl werden; so ist $y - 1$ ein Faktor von $S - 1 = F(S - 1)$. Wenn daher, wie hier, $S = 13$, so ist

$$S - 1 = 12,\ 12,\ 12,\ 12,\ 12,\ 12.$$
$$F(S - 1) = y - 1 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 13.$$
$$y = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 13.$$
$$\text{und} \left\{-1 + \frac{S-1}{y-1}\right\} y = x = 22,\ 15,\ 12,\ 10,\ 7,\ 0.$$

Daher sind die beiden Zahlen 2 u 22; 3 und 15; 4 und 12; 5 und 10; 7 und 7.

352.

Nach der Aufgabe ist $(x - y) - \frac{x}{y} = 15 = S$.

Daher

$Sy + y^2 = xy - x = x(y - 1)$ und

$$x = \frac{Sy + y^2}{y - 1} = \frac{S + y}{y - 1} \times y = \left\{1 + \frac{S+1}{y-1}\right\} y$$

Soll x eine ganze Zahl werden, so ist $y - 1$ ein Faktor von $S + 1 = F(S + 1)$. Wenn daher, wie hier, $S = 15$; so ist

$$S + 1 = 16,\ 16,\ 16,\ 16,\ 16$$
$$F(S + 1) = y - 1 = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$$
$$y = 2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17$$
$$\text{und} \left\{1 + \frac{S + 1}{y - 1}\right\} y = x = 34,\ 27,\ 25,\ 27,\ 34$$

Daher sind die beiden Zahlen 2 und 34; 3 und 27; 5 und 25; 9 und 27; 17 und 34.

Anmerkung. Die vier Aufgaben 349 — 352 stehen alle unter der allgemeinen Form $x = \left\{\mp a \pm \frac{S+1}{y \mp c}\right\} y$

353.

Nach der Aufgabe ist $(y^2 + 1)\, x = 51 = S$.

$$\text{Daher} \quad x = \frac{S}{y^2 + 1}.$$

Soll x eine ganze Zahl werden, so ist $y^2 + 1$ ein Faktor von $S = FS$. Wenn nun, wie hier

$$S = 51, \ 51, \ 51;$$

so ist $FS = y^2 + 1 = 1, \ 3, \ 17$

$$y^2 = 0, \ 2, \ 16$$

$$y = \sqrt{0}, \sqrt{2}, \ 4$$

und $\dfrac{S}{y^2 + 1} = x = 51, \ 17, \ 3$

Daher sind die beiden Zahlen in ganzen und rationalen 4 und 3. Zuweilen giebt es aber für beide unbekannte Größen gar keine Werthe in ganzen Zahlen, wie z. B. in der folgenden Aufgabe.

354.

Nach der Aufgabe ist $(y^2 - 1)\,x = 19 = S.$

Daher $x = \dfrac{S}{y^2 - 1}.$

Soll x eine ganze Zahl werden; so ist $y^2 - 1$ ein Faktor von $S = FS$. Wenn nun, wie hier,

$$S = 19, \ 19;$$

so ist $FS = y^2 - 1 = 1, \ 19$

$$y^2 = 2, \ 20$$

$$y = \sqrt{2}, \sqrt{20}.$$

Es giebt freilich rationale Werthe für y in ganzen Zahlen eine unendliche Menge, weil man jede Zahl dafür annehmen kann. Nur kann dann x keine ganze Zahl seyn.

Denn wenn $y = 2, \ 3, \ 4, \ 5;$ so ist

$$x = \frac{S}{y^2 - 1} = \tfrac{19}{3}, \ \tfrac{19}{8}, \ \tfrac{19}{15}, \ \tfrac{19}{24} \text{ u. s. f.}$$

355.

Nach der Aufgabe ist $\dfrac{x}{y} + xy = 20 = S.$

Daher $Sy = xy^2 + x = x\,(y^2 + 1)$

und $x = \dfrac{Sy}{y^2 - 1} = \dfrac{S}{y^2 + 1} \times y.$

Soll x eine ganze Zahl werden; so ist $y^2 + 1$ ein Faktor von $S = FS$. Wenn daher, wie hier,

$$S = 20, \ 20, \ 20, \ 20, \ 20, \ 20$$

so ist $FS = y^2 + 1 = 1, \ 2, \ 4, \ 5, \ 10, \ 20$

$$y^2 = 0, \ 1, \ 3, \ 4, \ 9, \ 19$$

$$y = 0, \ 1, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \ 3, \sqrt{19}$$

Daher sind die beiden Zahlen 1 und 10, 2 und 8, 3 und 6.

356.

Nach der Aufgabe ist $xy - \dfrac{x}{y} = 30 = S.$

Daher $Sy = xy^2 - x = x\,(y^2 - 1)$

und $x = \dfrac{Sy}{y^2 - 1} = \dfrac{S}{y^2 - 1} \times y.$

Soll nun x eine ganze Zahl werden; so ist $y^2 - 1$ ein Faktor von $S = FS$. Wenn daher, wie hier,

$$S = 30, \ 30, \ 30, \ 30, \ 30, \ 30, \ 30, \ 30$$

so ist $FS = y^2 - 1 = 1, \ 2, \ 3, \ 5, \ 6, \ 10, \ 15, \ 30$

$$y^2 = 2, \ 3, \ 4, \ 6, \ 7, \ 11, \ 16, \ 31$$

$$y = \ - \quad 2 \quad - \quad 4 \ \text{»}$$

Also $\dfrac{y^2 - 1}{S} \times y = x = \ - \quad 20 \quad - \quad 8 \ \text{»}$

Daher sind die beiden Zahlen 2 und 20, 4 und 8. Die übrigen Werthe für x sind irrational.

357.

Nach der Aufg. ist $y^2 + 1 = 10\left(\frac{y+1}{x}\right)$

Daher $$x = \frac{10}{y^2+1} \times (y+1).$$

Soll nun x eine ganze Zahl werden, so muß 10 durch $y^2 + 1$ theilbar seyn, also $y^2 + 1 = F10$. Nun sind

$$F10 = 1, 2, 5, 10 = y^2 + 1.$$

Also $$y^2 = 0, 1, 4, 9$$
$$y = 0, 1, 2, 3$$
$$\frac{10}{y^2+1} \times (y+1) = x = 10, 10, 6, 4.$$

Die beiden Zahlen sind daher 1 und 10, 2 und 6, 3 und 4.

XV.

368.

Nach der Aufgabe ist $(x+y) \times (x-y) = 39 = S$.

Daher $x^2 - y^2 = S$
$$x^2 = S + y^2$$
$$x = \sqrt{(S + y^2)}.$$

Es sey $\sqrt{S + y^2} = y + q$

so ist $S + y^2 = y^2 + 2qS + q^2$

und $$y = \frac{S - q^2}{2q}$$
$$x = \sqrt{(S + y^2)} = \sqrt{\left(S + \left\{\frac{S-q^2}{2q}\right\}^2\right)}$$
$$= \sqrt{\left\{\frac{4Sq^2 + S^2 - 2Sq^2 + q^4}{4q^2}\right\}}$$
$$= \frac{S + q^2}{2q}$$

Da nun $y = \frac{S - q^2}{2q}$, so kann y nur alsdann eine positive Zahl seyn, wenn $q^2 < S$, also $q < \sqrt{S}$. Sollen x und y auch ganze Zahlen seyn, so dürfen für q nur solche ganze Zahlen genommen werden, welche Faktoren von S sind. Da ferner sowohl $S - q^2$ als $S + q^2$ eine gerade

Zahl seyn muß, so muß q^2 und folglich auch q, mit S zugleich gerade oder ungerade seyn. Im vorliegenden Falle ist $S = 39$, also q eine ungerade Zahl, und ein Faktor von 39, aber kleiner als $\sqrt{39}$, also < 7; es können daher nur die Zahlen 1 und 3 für q gesetzt werden.

Setzt man daher $q = 1, \; 3$

also $q^2 = 1, \; 9$

$S - q^3 = 38, \; 30$

$2q = 2, \; 6$

so ist $\frac{S - q^2}{2q} = y = 19, \; 5$

und $\frac{S + q^2}{2q} = x = 20, \; 8.$

Daher sind die beiden Zahlen in ganzen Zahlen 19 und 20, 5 und 8.

Setzt man $q = \frac{m}{n}$ und $m < n$; so ist

$$y = \frac{Sn^2 - m^2}{2mn} \text{ und}$$

$$x = \frac{Sn^2 + m^2}{2mn},$$ wornach man, durch willkührliche Annahme von m und n, noch eine unendliche Menge Werthe für x und y in Brüchen erhält.

XVI.

379.

Die Einlage von A sey .... $= x$

die von B » .... $= x + 60$

die von C » .... $= y$

die ganze Einlage .... $= E.$

So ist nach der Aufgabe $E = 2x + 60 + y.$

Es ist aber auch $x + 60 + y = 600.$

Daher $y = 540 - x.$

Folglich $E = 2x + 60 + 540 - x = x + 600.$

Daher $x + 600 : x = 320$: Gewinn von A.

Also Gewinn von A $= \frac{320x}{x + 600}.$

Ferner ist $x + 600 : x + 60 = 320$: Gewinn von B.

Also Gewinn von B $= \frac{320x + 19200}{x + 600}.$

Nun ist nach der Aufgabe der Gewinn von $C = 136.$

Daher der ganze Gewinn

$$= \frac{640x + 19200}{x + 600} + 136 = 320$$

$$\frac{640x + 19200}{x + 600} = 184$$

$$\frac{80x + 2400}{x + 600} = 23$$

$$80x + 2400 = 23x + 13800$$

$$57x = 11400$$

$$x = 200.$$

Daher die Einlage von $A = 200$; Gewinn von $A = 80$

» » $B = 260$; » » $B = 104$

» » $C = 340$; » » $C = 136$.

380.

Wenn die Anzahl der Dukaten . . . . $= D$

die Anzahl der in eine Reihe des Quadrats zuerst gelegten Dukaten . . . . $= x$

so ist nach der Aufgabe

1. $x^2 + 284 = D$

2. $(x + 1)^2 - 25 = D$. Daher

$$(x + 1)^2 - 25 = x^2 + 284$$
$$x^2 + 2x + 1 - 25 = x^2 + 284$$
$$2x - 24 = 284$$
$$x = 154$$
$$x^2 = 23716$$
$$x^2 + 284 = 23716 + 284 = 24000 = D.$$

381.

Ein Ochse koste in $\frac{1}{5}$ Monat . . . . G Futtergeld.

Also in 1 Monate . . . . 5 G

in 12 Monaten . . . . . 60 G

Daher kosten 20 Ochsen in 12 Monaten 1200 G.

In den beiden ersten Monaten fraßen 20 Ochsen und kosten daher Futtergeld . . . . 200 G.

Nachher kommen noch 5 hinzu, und es fressen 25 Ochsen $6\frac{3}{5}$ Monat lang und kosten . . . . 825 G.

Haben also verzehrt . . . . 1025 G.

Daher bleiben noch von den für die 20 Ochsen auf 12 Monate akkordirten 1200 G übrig . . . . 175 G.

Nun kommen noch 10 Ochsen hinzu, also in allen 35 Ochsen. Gesetzt nun, es müssen diese noch x Monat gefüttert werden, so müssen diese die 175 G verzehren. Da nun jeder einzelne Ochse monatlich 5 G verzehrt, so verzehren 35 Ochsen in x Monaten $5 \times 35\,x\,G = 175\,x\,G$.

Man hat daher $175\,x\,G = 175\,G$

$$x = 1.$$

Also können die 35 Ochsen noch 1 Monat gefüttert werden, welches mit den verflossenen $8\frac{3}{5}$ Monaten $9\frac{3}{5}$ ausmacht.

382.

Es wären die 5 Zahlen x; xe; xe^2; xe^3; xe^4.

so ist $x + xe + xe^2 + xe^3 = 97\frac{1}{2} = (1 + e + e^2 + e^3)\,x$ I.

und $xe + xe^2 + xe^3 + xe^4 = 246\frac{1}{4}$. Daher II.

$$\frac{xe + xe^2 + xe^3 + xe^4}{x + xe + xe^2 + xe^3} = \frac{e + e^2 + e^3 + e^4}{1 + e + e^2 + e^3}$$
$$= \frac{(1 + e + e^2 + e^3)\,e}{1 + e + e^2 + e^3} = e.$$

Daher $e = \frac{585 : 4}{195 : 2} = \frac{585}{390} = \frac{3}{2}$.

Diesen Werth in 1 gesetzt, giebt

$$(1 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{4} + \tfrac{27}{8})\,x = 97\tfrac{1}{2}.$$

Daher $\frac{65\,x}{8} = 97\frac{1}{2} = \frac{195}{2}$

also $x = \frac{195}{2} \times \frac{8}{65} = 12$.

Folglich sind die fünf Zahlen 12, 18, 27, $40\frac{1}{2}$, $60\frac{3}{4}$.

Erinnert man sich eines bekannten Satzes der geometrischen Progression daß sich in derselben die Summe aller

Glieder weniger dem letztern zur Summe aller Glieder weniger dem erstern verhalte, wie 1 zum Exponent *), so ist

$$97\tfrac{1}{2} : 146\tfrac{1}{4} = 1 : e.$$

Also $$e = \frac{146\frac{1}{4}}{97\frac{1}{2}}$$ wie oben.

384.

Des Stundenzeigers S Geschwindigkeit verhält sich zu der des Minutenzeigers M, wie 1 zu 12. Da nun um 12 Uhr beide Zeiger gerade über einander stehn, so ist S auf 1 Uhr, wenn M zum zweiten Mal über 12 Uhr kommt, also nach einer Stunde. In dieser ersten Stunde können sich beide nicht treffen; denn in der ersten halben Stunde ist M beständig vor S, alsdann stehn beide in gerader Linie, haben aber entgegengesetzte Lagen. Hierauf, in der folgenden halben Stunde, ist M immer hinter S. Da nun M jetzt auf 12 und S auf 1 steht, so muß M, wenn er zum dritten mal über 12 kommt, S vorbeigegangen, also mit ihm zusammen gewesen seyn. Nun hatte S eine Stunde oder den 12ten Theil der ganzen Peripherie der Uhr vor M voraus; ist daher der Weg, den S gehen muß, bis zum Zusammentreffen x, so ist der von M $1 + x$. Man hat daher $x : 1 + x = 1 : 12$

Folglich
$$12x = 1 + x$$
$$11x = 1$$
$$x = \tfrac{1}{11} \text{ Stunde} = 5\tfrac{5}{11} \text{ Min.}$$

Da S nun über 1 stand, so muß er jetzt über 1 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten stehn Während der darauf folgenden Stun-

*) Hellwig's Anfangsgründe der allgemeinen Mathematik und Arithmetik, §. 423.

de, oder zwischen 1 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten bis zu 2 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten, ist kein Zusammentreffen möglich, wie aus Obigem erhellt, wohl aber in der nun folgenden, wo M anfangs derselben auf 1 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten und S auf 2 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten stand, und man findet eben so, wie vorhin, daß bis zum Zusammentreffen, S von seinem jetzigen Orte noch $\frac{1}{11}$ Stunde oder $5\frac{5}{11}$ Minuten gehen muß; er steht also jetzt auf 2 Uhr $10\frac{10}{11}$ Minuten, welches der dritte Punkt des Zusammentreffens ist.

Eben so findet man

den	4ten	Punkt	des Zusammentr.	um	3	Uhr	$16\frac{4}{11}$	Min.
»	5ten	»	»	»	4	»	$21\frac{9}{11}$	»
»	6ten	»	»	»	5	»	$27\frac{3}{11}$	»
»	7ten	»	»	»	6	»	$32\frac{8}{11}$	»
»	8ten	»	»	»	7	»	$38\frac{2}{11}$	»
»	9ten	»	»	»	8	»	$43\frac{7}{11}$	»
»	10ten	»	»	»	9	»	$49\frac{1}{11}$	»
»	11ten	»	»	»	10	»	$54\frac{6}{11}$	»
»	12ten	»	»	»	12	»		

welches wieder der erste Punkt des Zusammentreffens war.

384.

Es geschehe dies in x Stunden. Da nun A in 24 Stunden 40 Meilen läuft, so läuft er in x Stunden $\frac{40}{24}x = \frac{5}{3}x$ Meilen. Da nun beide Läufer 40 Meilen von einander entfernt sind, so hat B noch $40 - \frac{5}{3}x$ Meilen zu laufen, um mit A zusammenzutreffen; B läuft aber 40 Meilen in 30 Stunden, also $40 - \frac{5}{3}x$ Meilen

in $\frac{30}{40}(40 - \frac{5}{3}x) = \frac{3}{4}(40 - \frac{5}{3}x)$ Stunden.

Folglich ist $\frac{3}{4}(40 - \frac{5}{3}x) = x$

$$\frac{120 - 5x}{4} = x$$

$$120 = 9x$$

$$x = 13\tfrac{1}{3} \text{ Stunden,}$$

wo A $\frac{5}{3}x = 22\frac{2}{9}$, B $40 - \frac{5}{3}x = 17\frac{7}{9}$ Meilen läuft.

Allgemeine Auflösung.

A laufe M Meilen in a Stunden,
B laufe M Meilen in b Stunden.

Beide kommen sich in x Stunden entgegen, so ist A $\frac{Mx}{a}$ Meilen, und B $M - \frac{Mx}{a}$ Meilen gelaufen. A gebraucht zu seinem Wege x und B $b\left\{\frac{M - \frac{Mx}{a}}{M}\right\}$ $= b\left\{1 - \frac{x}{a}\right\}$ Stunden.

Da nun beide Zeiten gleich sind, so ist

$$b\left\{1 - \frac{x}{a}\right\} = x$$

$$ab - bx = ax$$

$$ax + bx = ab$$

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

wo A $\frac{Mx}{a} = \frac{Mb}{a+b}$ Meilen

und B $M - \frac{Mx}{a} = \frac{Ma}{a+b}$ Meilen läuft.

385.

Der Himten Rocken koste x Gr., so erhält der Erste für 51 Tage $12x + 93$, also für einen Tag

$$\frac{12x + 93}{51} = \frac{4x + 31}{17},$$

der Andere für 63 Tage $18x + 45$, also für einen Tag

$$\frac{18x + 45}{63} = \frac{6x + 15}{21}.$$ Daher nach der Aufgabe $\frac{4x + 31}{17} = \frac{6x + 15}{21}$

$$84x + 651 = 102x + 255$$

$$18x = 396$$

$$x = 22$$

Den Tagelohn findet man, wenn man in $\frac{4x + 31}{17}$ für x seinen Werth setzt $= 7$ Ggr.

386.

Es wird bei dieser Aufgabe vorausgesetzt, daß der Sack ein Cylinder sey. Daher entsteht beim Zusammennähen zweier Säcke von gleicher Länge, ein neuer Cylinder, dessen Grundfläche eine Peripherie hat, die so groß ist, als die der beiden Grundflächen der andern Säcke zusammen, oder, welches einerlei ist, einen Halb- oder Durchmesser hat, so groß, als der, der beiden andern zusammen. Nun ist aus der Geometrie bekannt, daß sich der körperliche Inhalt eines Cylinders zu dem eines andern von gleicher Höhe verhält, wie das Quadrat des Halbmessers der Grundfläche des ersten zum Quadrat der Grundfläche des andern. Da nun in der vorliegenden Aufgabe das Verhältniß des Inhalts der beiden Säcke $= 4 : 9$ ist, so ist das Verhältniß der Halbmesser ihrer Grundflächen $= 2 : 3$. Der zweite Halbmesser hat daher 3 solcher Theile, deren der erste zwei hat, und der neue hat deren $5 = 2 + 3$.

Man hat daher $2^2 : 5^2 = 4$ Himbten : x Hmbt.

$$4 : 25 = 4 : x$$
$$x = 25$$

387.

Diese Aufgabe ist der vorhergehenden ähnlich, nur mit dem Unterschiede, daß hier beide Säcke gleichen Inhalts sind. Der Halbmesser der Grundfläche des neuen Sackes wird daher doppelt so groß seyn, als der, der Grundfläche jeder der beiden andern.

Man hat daher $1^2 : 2^2 = 2\frac{1}{2} : x$

oder $1 : 4 = 2\frac{1}{2} : x$

$$x = 10.$$

388.

Es sey die verlangte Zahl $= x$; so ist nach der Aufgabe

$$\sqrt[3]{(x+482)} - \sqrt[3]{(x-120)} = 2.$$

Nun sey $\sqrt[3]{(x-120)} = y.$

Also $x - 120 = y^3$

so ist $\sqrt[3]{(x+482)} - y = 2$

$$\sqrt[3]{(x+482)} = y + 2$$

und $x + 482 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8.$

Da nun $x - 120 = y^3$

so ist $6y^2 + 12y + 8 = 602$

und $y^2 + 2y = 99.$

Daher $y = -1 \mp 10 = 9$

oder $= -11.$

Wenn $y = 9$; so ist

$$y^3 = 729.$$

Da nun $y^3 = x - 120$;

so ist $x = 849.$

Probe.

Es ist $\sqrt[3]{(x+482)} = \sqrt[3]{1331} = 11$

$$\sqrt[3]{(x-120)} = \sqrt[3]{729} = 9.$$

Daher $\sqrt[3]{(x+482)} - \sqrt[3]{(x-120)} = 2.$

389.

Wenn das Alter des Vaters . . . . $= x.$

Der körperliche Inhalt der Kugel . . . . . . $= K.$

Deren Diameter . . . . $= D.$

Die Peripherie . . . . $= P.$

Setzt man nun, wie in der Aufgabe angenommen wird . . . . $D : P = 7 : 22$;

so ist nach geometrischen Gründen . . . . . $D = \sqrt[3]{\frac{21K}{11}}.$

Es ist aber nach der Aufgabe $D : x = 7 : 13.$

Daher $x = \frac{13D}{7} = \frac{13}{7}\sqrt[3]{\frac{21K}{11}}.$

Nun ist aber nach der Aufgabe $K = 11498\frac{2}{3}.$

Folglich $x = \frac{13}{7}\sqrt[3]{\frac{21 \times 11498\frac{2}{3}}{11}}$

$$= \frac{13}{7}\sqrt[3]{\frac{21 \times 34496}{33}}$$

$$= \frac{13}{7}\sqrt[3]{21952}$$

$$= \frac{13 \times 28}{7} = 52.$$

390.

Die erste Zahl sey $= x$; so ist nach der Aufgabe

$$x^4 + 599 = 3000$$
$$x^4 = 2401.$$

Also $x = 7$.

Daher der erste Buchstabe des Worts ein S.

Die andere Zahl sey $= y$; so ist nach der Aufgabe

$$y + \tfrac{1}{6} = M.$$

Es ist aber $M + 7 = 7M$.

Also $M = \tfrac{7}{6}$.

Folglich $y + \tfrac{1}{6} = \tfrac{7}{6}$.

und $y = 1$.

Daher der zweite Buchstabe des Wortes ein E.

Die dritte Zahl sey $= z$; so ist nach der Aufgabe

$$\frac{3\sqrt{10000z}}{100} = z$$

Daher $\sqrt{10000z} = \dfrac{100z}{3}$

und $10000z = \dfrac{10000z^2}{9}$

Also $z = 9$.

Folglich ist der dritte Buchstabe des Wortes ein N.

Die vierte Zahl sey $= w$; so ist die geometrische Progression $w; we; we^2$

Also $w + we + we^2 = 35$ I.

und $w^3 e^3 = 1000$.

Daher $we = \sqrt[3]{1000} = 10$.   II.

Aus I und II folgt $w = 25 - 10e$.   III.

Aus II u. III folgt $(25 - 10e)e = 10$.

Also $e^2 = \dfrac{5e}{2} - 1$

und $e = \tfrac{5}{4} \mp \sqrt{(-1 + \tfrac{25}{16})}$

$= \tfrac{5}{4} \mp \tfrac{3}{4}$

$= 2$ oder $\tfrac{1}{2}$.

Ist das erstere, so ist $w = 25 - 10e = 25 - 20$

$= 5$.

Folglich ist der vierte Buchstabe ein F.

Es war also Senf, was der mathematische Freund aus der Stadt nicht kannte. Es war indessen ein glücklicher Zufall, daß es keine Pflanze giebt, die Senz heißt; sonst wäre der mathematische Freund doch im Zweifel geblieben. Denn da auch $e = \tfrac{1}{2}$ seyn kann; so kann auch $w = 20$ seyn, dann würde der vierte Buchstabe z und die Pflanze Senz gewesen seyn. Um diesen Zweifel zu verhüten, hätte der Landwirth nur die geometrische Progression als eine zunehmende bestimmen dürfen.

395.

Es sey die Anzahl der Kugeln, womit sich der in der Aufgabe angegebene volle Haufen endigt, $= r$; die Anzahl der Schichte $= s$; so liegt in der

1sten Schicht v. oben $= r \times 1 = r + 0 + 0 + 0$

2ten Schicht v. o. $= (r+1) \times (1+1) = r + 1 + r + 1$

3ten Schicht v. o. $= (r+2) \times (1+2) = r + 2 + 2r + 4$

4ten Schicht v. o. $= (r+3) \times (1+3) = r + 3 + 3r + 9$

und in der sten Schichte von oben

$= (r+s-1) \times (1+s-1) = r + (s-1) + (s-1)r + (s-1)^2$

I.   II.   III.   IV.

Daher besteht die 1ste Vertikalreihe aus s mal $r = sr$

die 2te Vertikalreihe macht eine arithmetische Progression, die sich mit 1 anfängt, deren letztes Glied $= s - 1$, und die aus $(s - 1)$ Gliedern besteht, die daher

$$= [1 + (s - 1)] \times \left\{\frac{s - 1}{2}\right\}$$

$$= \frac{s^2 - s}{2}$$

die 3te Vertikalreihe macht eine arithmetische Progression, die sich mit 1 anfängt, deren letztes Glied $= (s - 1)\, r$, und die aus $(s - 1)$ Gliedern besteht; die daher

$$= (1 + (s - 1)\, r) \times \left\{\frac{s - 1}{2}\right\}$$

$$= \frac{rs^2 - rs}{2}$$

die 4te Vertikalreihe enthält die Quadrate der von 1 bis $(s - 1)$ auf einander folgenden Zahlen

$$= \frac{2s^3 - 3s^2 + s}{6}.$$

(Vegas logarithmische Tafeln. Wien 1783. Seite 385.)

Wenn also die Summe der Kugeln in einem solchen Haufen

$$= K; \text{ so ist } K = sr + \frac{s^2 - s}{2} + \frac{rs^2 - rs}{2} + \frac{2s^3 - 3s^2 + s}{6}$$

$$= \frac{6sr + 3s^2 - 3s + 3rs^2 - 3rs + 2s^3 - 3s^2 + s}{6}$$

$$= \left\{\frac{s - 1}{3} + \frac{r}{2}\right\}(s + 1)\, s$$

$$= \frac{(2s + 3r - 2)(s + 1)\, s}{6}.$$

In der Aufgabe ist $s = 10$; $r = 30$.

$$\text{Daher} \quad K = \frac{(20 + 90 - 2) \times 11 \times 10}{6}$$

$$= \frac{108 \times 11 \times 10}{6} = 1980.$$

392.

Wenn aus dem Capital C nach n Jahren zu p Procent das Capital K wird; so ist nach der bekannten Formel

$$C = \left\{\frac{100}{100 + p}\right\}^n K.$$

Da nun nach der Aufgabe $K = 690$; $n = 3$; $p = 5$; so ist $C = (\tfrac{100}{105})^3 \times 690$

$$= (\tfrac{20}{21})^3 \times 690 = \frac{8000 \times 690}{9261}$$

$$= 596\tfrac{944}{9261} \text{ Thlr.}$$

$$= 596 \text{ Thl. } 2 \text{ Ggr. } 5 \text{ Pf.}$$

Da die Anzahl der Jahre, wie lange das Capital vorausgezahlt wird, nicht groß ist; so läßt sich C auf diese Weise noch ohne viele Unbequemlichkeit berechnen. Ist aber die Anzahl der Jahre größer; so muß man seine Zuflucht zu den Logarithmen nehmen, und es ist

$$LC = LK - n\, [(L\, (100 + p)] - 2).$$

Anmerk. Die allgemeine Formel findet sich bequem so: Es ist nämlich $100 : p = c : z$.

Daher $z = \frac{pc}{100}$ = den einjährigen Zinsen des Capitals C.

Nach Ablauf des 1sten Jahrs ist daher aus C geworden

$$c + \frac{pc}{100} = \left\{1 + \frac{p}{100}\right\} c$$

und wenn $1 + \frac{p}{100} = E$; so ist aus c geworden $= Ec = A$.

Nach Ablauf des 2ten Jahrs aus A geworden

$$A + \frac{pA}{100} = \left\{1 + \frac{p}{100}\right\} A$$
$$= EA = B.$$

Nach Ablauf des 3ten Jahrs ist aus B geworden

$$B + \frac{pB}{100} = \left\{1 + \frac{p}{100}\right\} B$$
$$= EB = D.$$

Daher wurde nach Ablauf des 1sten Jahrs aus c; $A = Ec$

» » » 2ten J. aus c; $B = EA = E^2c$.

» » » 3ten J. aus c; $D = EB = E^3c$.

Hieraus erhellt, daß wenn nach n Jahren K entstehen soll,

daß $K = E^n c = \left\{1 + \frac{p}{100}\right\}^n c = \left\{\frac{100 + p}{100}\right\}^n c$

seyn müsse. Daher $c = \dfrac{K}{\left\{\frac{100 + p}{100}\right\}^n}$

$$= \left\{\frac{100}{100 + p}\right\}^n K.$$

393.

Es sey das zu bezahlende Capital $= c$; das, was in dreien Jahren jährlich abgezahlt werden soll, $= b$; so wird bei dem Zinsfuß zu p Procent das Capital am Ende des 1sten Jahrs $= c + \frac{pc}{100}$. (Man sehe 392.)

$$= Ec \text{ wenn } \left\{1 + \frac{p}{100}\right\} = E;$$

und wenn b abbezahlt worden, bleibt das Capital $= Ec - b = A$.

Dies wird am Ende des 2ten Jahrs $= A + \frac{pA}{100} = EA$

und wenn abermahl b abbezahlt worden $= EA - b = B$.

Dies wird am Ende des 3ten Jahr $= B + \frac{pB}{100} = EB$

und wenn endlich b abgezahlt worden; so ist das Capital $= EB - b$.

Da nun aber jetzt, nach der Aufgabe, Capital und Interessen bezahlt seyn sollen; so ist

$$EB - b = 0.$$

Also
$$\begin{aligned} b &= EB \\ &= E\,(EA - b) \\ &= E^2A - Eb \\ &= E^2\,(Ec - b) - Eb \\ &= E^3c - E^2b - Eb. \end{aligned}$$

Daher $E^2b + Eb + b = E^3c$

und $b = \dfrac{E^3c}{1 + E + E^2}$.

Es ist leicht darzuthun, daß für 4 Jahre

$$b = \frac{E^4c}{1 + E + E^2 + E^3}$$

und also für n Jahre $b = \dfrac{E^n c}{1 + E + E^2 + E^3 \ldots + E^{n-1}}$

seyn werde.

Es ist aber der Nenner dieses Bruches die Summe einer geometrischen Progression, deren 1stes Glied $= 1$; der

Exponent = E; die Anzahl der Glieder = n. Daher ist dieser Nenner = $(E^n - 1) : (E - 1)$ *).

$$\text{Folglich } b = \frac{E^n c}{(E^n - 1) : (E - 1)} = \frac{E^n c \times (E - 1)}{E^n - 1}$$

$$= \frac{c\,(E - 1)}{(E^n - 1) : E^n}$$

$$= \frac{c\,(E - 1)}{1 - \frac{1}{E^n}} = \frac{cp : 100}{1 - \left\{\frac{100}{100 + p}\right\}^n}$$

Da nun in dem vorliegenden Fall

$c = 6305$; $p = 5$; $n = 3$; so ist

$$b = \frac{(6305 \times 5) : 100}{1 - \left\{\frac{100}{100 + 5}\right\}^3}$$

$$= \frac{31525 : 100}{1 - (\frac{20}{21})^3}$$

$$= \frac{31525 : 100}{1 - \frac{8000}{9261}}$$

$$= \frac{31525 : 100}{1261 : 9261}$$

$$= \frac{1261 : 4}{1261 : 9261} = \frac{9261}{4} = 2315\tfrac{1}{4} \text{ Thlr.}$$

393 a. **)

Wüßte man, wie viele Zeit jede Compagnie braucht, um die verlangte Anzahl Patronen allein zu verfertigen, so

*) Hellwig's A. Math. u. Arithmet. S. 332. §. 425.

**) Die den folgenden drei Auflösungen entsprechenden Aufgaben werden in einer neuen Auflage des Exempelbuchs mitgetheilt werden.

könnte man eben so, wie in I. Nro. 64, verfahren. Man setze daher die erste Compagnie, brauche dazu x, die zweite y, die dritte z Tage. Man setze ferner die Anzahl Patronen, nämlich $150{,}000 = n$, so verfertigt die erste Compagnie in 30 Tagen $\frac{30n}{x}$, die zweite in eben der Zeit $\frac{36n}{x}$ Patronen, weil nun nach der Aufgabe beide n Patronen in 30 Tagen verfertigen können, so ist

$$\frac{30n}{x} + \frac{30n}{y} = n, \text{ oder}$$

$$\frac{30}{x} + \frac{30}{y} = 1. \quad \text{I.}$$

Da ferner die erste Compagnie in x Tagen, die dritte aber in z Tagen n Patronen macht, so wird jene in 36 Tagen $\frac{36n}{x}$, und diese in eben der Zeit $\frac{36n}{z}$ Patronen, folglich ist nach der Aufgabe

$$\frac{36n}{x} + \frac{36n}{z} = n, \text{ oder } \frac{36}{x} + \frac{36}{z} = 1. \qquad \text{II.}$$

Da endlich die zweite Compagnie in y, die dritte aber in z Tagen n Patronen verfertigt, so wird jene in 60 Tagen $\frac{60n}{y}$, diese aber in derselben Zeit $\frac{60n}{z}$ Patronen verfertigen, und also nach der Aufgabe

$$\frac{60n}{y} + \frac{60n}{z} = n \text{ oder } \frac{60}{y} + \frac{60}{z} = 1. \qquad \text{III.}$$

Aus I folgt $30y + 30x = xy$ IV.

Aus II folgt $36x + 36z = xz$ V.

Aus III folgt $60z + 60y = yz$ VI.

Aus IV folgt $x = \frac{30y}{y - 30}$ VII.

Aus V folgt $x = \frac{36z}{z - 36}$ VIII.

Aus VII u. VIII folgt $6yz = 1080z - 1080y$

$yz = 180z - 180y$ IX.

Aus VI u. IX folgt $60z + 60y = 180z - 180y$

$120z - 240y = 0$

$z = 2y$ X.

Aus VI u. X folgt $120y + 60y = 2y^2$

$180y = 2y^2$

$y = 90$ XI.

Aus X und XI folgt $z = 180$ XII.

Aus IV u. XI folgt $x = 45$

Die erste Compagnie kann sie also in 45 Tagen
» zweite » » » » » 90 »
» dritte » » » » » 180 »
allein verfertigen. Man sieht übrigens, daß die Anzahl Patronen auf obige Auflösung keinen Einfluß hat; und man die ganze Arbeit $= 1$ setzen kann. Um nun zu finden, in wie viel Tagen alle drei Compagnien, wenn sie zugleich arbeiten, die verlangte Anzahl Patronen verfertigen, setze man: dieses geschehe in u Tagen, so macht die erste $\frac{u}{45}$, die zweite $\frac{u}{90}$ und die dritte $\frac{u}{180}$ von der ganzen Arbeit, folglich nach der Aufgabe

$$\frac{u}{45} + \frac{u}{90} + \frac{u}{180} = 1$$

$$\frac{7u}{180} = 1$$

$$u = 25\tfrac{5}{7}$$

393 b.

Es seyn die beiden ersten Zahlen x, y; so muß die dritte $\frac{y^2}{x}$ seyn. Folglich ist nach der Aufgabe

$$x + y + \frac{y^2}{x} = 78 \qquad \text{I.}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 3276 \qquad \text{II.}$$

II durch I dividirt, giebt $x - y + \frac{y^2}{x} = 42$ III.

Aus I und III folgt $2y = 36$

$y = 18$ IV.

Aus I u. III folgt auch $2x + \frac{2y^2}{x} = 120$

$$x + \frac{y^2}{x} = 60 \qquad \text{V.}$$

Aus IV und V folgt $x^2 = 60x - 324$

$x = 6$ oder 54.

Also die drei Zahlen 6, 18, 54.

393 c.

Es seyn die vier Zahlen x^3, x^2y, xy^2, y^3, so hat man folgende zwei Gleichungen

$$x^6 + x^2y + xy^2 + y^3 = 425$$

$$x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6 = 109225$$

Welche auch so ausgedrückt werden können

$$(x + y)\,(x^2 + y^2) = 425 \qquad \text{I.}$$

$$(x^2 + y^2)\,(x^4 + y^4) = 109225 \qquad \text{II.}$$

Man setze $x + y = z$ III.

und $x^2 + y^2 = v$ IV.

so folgt aus I. III u. IV $zv = 425$ V.

Aus III folgt $x^2 + 2xy + y^2 = z^2$ VI.

Aus IV u. VI folgt $v + 2xy = z^2$

$$2xy = z^2 - v$$

$$4x^2y^2 = z^4 - 2vz^2 + v^2 \qquad \text{VII.}$$

Aus IV folgt $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = v^2$ VIII.

Aus II u. III folgt $x^4 + y^4 = \frac{109225}{v}$ IX.

Aus VIII u. IX folgt $2x^2y^2 = v^2 - \frac{109225}{v}$

$$4x^2y^2 = 2v^2 - \frac{218450}{v} \qquad \text{X.}$$

Aus VII u. X folgt $2v^2 - \frac{218450}{v} = z^4 - 2vz^2 + v^2$

$$v^2 - \frac{218450}{v} = z^4 - 2vz^2 \qquad \text{XI.}$$

Aus V u. IX folgt $\frac{180625}{z^2} - \frac{218450}{425}z = z^4 - 850z$

$$z^6 - 336z^3 = 180625$$

Man setze $z^3 = u$

so wird $u^2 - 336u = 180625$

$$u = 168 \mp \sqrt{(180625 + 28224)}$$
$$= 625$$

Also $z = x + y = \sqrt[3]{652} = 5\sqrt[3]{5}$

und $v = x^2 + y^3 = \frac{425}{z} = \frac{85}{\sqrt[3]{5}} = 17\,(\sqrt[3]{5})^2$

Hierdurch wird die Aufgabe auf die von Nro. 225 zurückgeführt, und man erhält, wenn man in die dortige allgemeine Formel $S = 5\sqrt[3]{5}$ und $Q = 17\,(\sqrt[3]{5})^2$ setzt,

$$x = \frac{5\sqrt[3]{5} \pm 3\sqrt[3]{5}}{2} = \sqrt[3]{5} \text{ oder } = 4\sqrt[3]{5}$$

$$y = 5\sqrt[3]{5} - x = 4\sqrt[3]{5} \text{ oder } = \sqrt[3]{5}$$

Daher sind die vier Zahlen 5, 20, 80, 320.

393 d.

Es sey y die kleinste Zahl, so sind die vier Zahlen, y, $y + 4$, $y + 8$, $y + 12$. Man hat daher nach der Aufgabe

$$y \times y + 4 \times y + 8 \times y + 12 = 176985$$

oder $y^4 + 24y^3 + 144y^2 + 32y^2 + 384y = 176985$

d. i. $(y^2 + 12y)^2 + 32(y^2 + 12y) = 176885$

Man setze $y^2 + 12y = x$, so erhält man $x^2 + 32x = 176985$

Daher $x^2 + 32x + 256 = 177241$

also $x + 16 = 421$

oder $x = 405$

mithin $y^2 + 12y = 405$, $y^2 + 12y + 36 = 441$,

also $y + 6 = 21$ und $y = 15$.

Daher die vier Zahlen 15, 19, 23, 27.

393 e.

Nach der Aufgabe hat man $x^2 + xy = 396 = a.$ I.

$y^2 + yz = 1375 = b.$ II.

$z^2 + xz = 1230 = c.$ III.

Aus I folgt $x + y = \frac{a}{x}$ IV.

Aus II folgt $y + z = \frac{b}{y}$ V.

» III » $a + z = \frac{c}{z}$ VI.

» IV u. V folgt $\frac{a}{x} - x + z = \frac{bx}{a - x^2}$ VII.

Oder $x^4 - x^3z - (2a + b)x^2 + axz + a^2 = 0$ VIII.

Aus VI u. VIII folgt $2z^8 - (3a + b + 7c)z^6 + (9c^2 + 5ac + 2bc + a^2)z^4 - (5c^3 + 2ac^2 + bc^2)z^2 + c^4 = 0$.

Oder, wenn man für die Buchstaben die ihnen entsprechenden Zahlen setzt

$$2z^8 - 11173z^6 + 19590816z^4 - 12582789300z^2 + 2288866410000 = 0.$$

Oder $$z^8 - \frac{11173}{2}z^6 + 9795408z^4 - 6291394650z^2 + 1144433205000 = 0.$$

Setzt man $z = \frac{m}{2}$, so erhält man

$$m^8 - 1173 \times 2m^6 + 9795408 \times 2^4 m^4 - 6291394650 \times 2^6 m^6 + 1144433205000 \times 2^8 = 0,$$

welche Gleichung erst für $m = 60$ auf 0 gebracht wird, folglich $z = 60$, und daher aus V $y = 25$ und aus VI $x = 11$.

393 f.

Es sey die Anzahl der Schaafe, die irgend eine Frau gekauft hat, $= x$, und die, welche ihr Mann gekauft hat, $= x + n$; so hat nach der Aufgabe die Frau bezahlt x^2 Schilling, und ihr Mann $x^2 + 2nx + x^2$ Schilling. Man hat daher

$$x^2 + 2nx + n^2 = x^2 + 63$$

Daher $2nx + n^2 = 63$, also $x = \frac{63 - n^2}{2n}$

n^2 muß < 63, oder $n < 8$ seyn. Ferner muß $2n$ und folglich auch n ein Factor $63 - n^2$, mithin auch von 63 seyn, woraus man sieht, daß n eine ungerade Zahl seyn muß. Setzt man daher $n = 1$

so ist $x = 31$
$x + n = 32$

Eine Frau muß daher 31 Schaafe gekauft haben, und ihr Mann 32. Nimmt man $n = 3$

so ist $x = 9$
$x + n = 12$

Eine andere Frau muß daher 9, und ihr Mann 12 Schaafe gekauft haben. Nimmt man $n = 7$

so ist $x = 1$
$n + x = 8$

Eine dritte Frau hat daher nur 1 Schaaf, und ihr Mann 8 Schaafe gekauft. Da nun $9 + 23 = 32$, so wird Karl 32, und Sophie 9 gekauft haben, und da ferner $1 + 11 = 12$, so muß Ferdinand 12 Schaafe, und Katharine 1 Schaaf gekauft haben. Ferdinands Frau muß also die gewesen seyn, die 9 gekauft hat, mithin Sophie. Theodor muß 8, und Elisabeth 31 gekauft haben. Karls Frau hieß daher Elisabeth, und Theodors Frau Katharine.

393 g.

Es sey das Alter des ältesten Sohns u, das der folgenden

Söhne nach der Ordnung, w, x, y, z; so hat man nach der Aufgabe

$$w^2 + x^2 = 89 \qquad \text{I.}$$
$$w + x + wx = 53 \qquad \text{II.}$$
$$\frac{u^2 + z^2}{u + z} = 18\tfrac{1}{10} \qquad \text{III.}$$
$$\frac{u^3 + z^3}{u^2 + z^2} = 18\frac{172}{181} \qquad \text{IV.}$$
$$\frac{y^5 + z^5}{yz(y+z)^3} = 2\frac{1}{20} \qquad \text{V.}$$

Man setze die Summe der beiden Größen w und $x = 2S$, ihr Unterschied $= 2d$, so ist $w = S + d$, und $x = S - d$. Diese Werthe in die beiden ersten Gleichungen gesetzt giebt

$$2S^2 + 2d^2 = 89 \qquad \text{VI.}$$
$$S^2 - d^2 + 2S = 53 \qquad \text{VII.}$$

Aus diesen beiden folgt

$$4S^2 + 4S = 195$$

Oder $S^2 + S = \frac{195}{4}$.

Daher $S = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{196}{4}} = 6\frac{1}{2}$ IX.

Aus VI u. IX folgt $d = \frac{3}{2}$

und folglich $w = S + d = 8$

$x = S - d = 5$

Setzt man ferner $u + z = 2S$, $u - z = 2d$, daß also $u = S + d$ und $z = S - d$, so erhält man, wenn man diese Werthe in III und IV setzt,

$$2S^2 + 2d^2 = 36\tfrac{1}{5} S \times$$
$$2S^3 + 6Sd^2 = 18\tfrac{172}{181}(2S^2 + 2d^2) = 18\tfrac{172}{181} \times 36\tfrac{1}{5} S.$$

Oder $2S^2 + 6d^2 = 18\frac{172}{181} \times 36\frac{1}{5} = 686$ XI.

Aus X u. XI folgt

$$4S^2 - 108\tfrac{3}{5}S = -686$$

Oder $S^2 - \frac{543}{20} = -\frac{686}{4}$

Also $S = \frac{543}{40} \pm \sqrt{\frac{20449}{1600}} = 17\frac{3}{20}$ o. $= 10$

Aber nur der zweite Werth ist hier brauchbar. Denn der erste würde d irrational geben. Nun folgt aus XI

$$6d^2 = 686 - 2S^2 \text{ oder } d = \sqrt{\frac{686 - 2S^2}{6}} = \sqrt{81} = 9$$

folglich $u = 19$, $z = 1$.

Setzt man endlich $y + z = 2S$, $y - z = 2d$, so erhält, man wenn man diesen Werth in V setzt,

$$\frac{S^4 + 10S^2d^2 + 5d^4}{(S^2 - d^2)\,4S^2} = 2\tfrac{1}{20}$$

folglich $d^4 + 3\frac{16}{25}S^2d^2 = 1\frac{11}{25}S^4$

Setzt man $d^2 = m$

so ist $m^2 + 3\frac{16}{25}mS^2 = 1\frac{11}{25}S^4$

Daher $m = \pm\sqrt{\frac{11881S^2}{2500}} - \frac{91S^2}{50} = \frac{9}{25}S^2$

Also $d = \frac{3}{5}S$. Da nun $z = S - d$, so ist $z = \frac{2}{5}S$ und $y = S + d = \frac{8}{5}S$, mithin $y = 4z = 4$, (weil $z = 1$).

Das Alter der fünf Kinder ist daher 19, 8, 5, 4, 1.

393 h.

Nach der Aufgabe hat man folgende zwei Gleichungen

$$x^2 + xy + y^2 = 1087 \qquad \text{I.}$$
$$x^4 + x^3y^3 + y^4 = 45777295 \qquad \text{II.}$$

Man setze $x^2 + y^2 = v$, $xy = w$, so erhält man

$$v + w = 1083 \qquad \text{III.}$$
$$v^2 - 2w^2 + v^3 = 45777295 \qquad \text{IV.}$$

(Denn $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = v^2 - 2w^2$).

Aus III u. IV folgt $w^3 - w^2 - 2174\,w - 44595726 = 0$.
Die Factoren dieser Gleichung sind 1, 2, 3, 6, 11, 17, 167, 357, 714 u. s. w.

aber $w^3 > 44595726$, also $w > \sqrt[3]{44595726} > 354$.
Daher darf man nur den Versuch mit 357 anfangen.

Diese Zahl bringt die Gleichung auf 0, folglich $w = 357$.
Man hat also $xy = 357$

$$x^2 + y^2 = v = 1087 - w = 730.$$

Die erste dieser Gleichungen doppelt genommen, und zur zweiten addirt, giebt $x^2 + 2xy + y^2 = 1444$

also $x + y = 38$

Nun ist $xy = 357$

so folgt a. dies. letzt. beiden $y^2 - 38y = -357$

$$y = 19 \pm 2 = 21$$

oder $= 17$.

Die älteste war also 21, und die jüngste 17 Jahr alt.

393 i.

Die Zahlen seyen u, x, y, z, so giebt die Aufgabe folgende vier Gleichungen:

$$u^2 + ux + uy + uz = 252$$
$$x^2 + ux + xy + xz = 504$$
$$y^2 + yu + yx + yz = 396$$
$$z^2 + zu + zx + zy = 144$$

Alle diese Gleichungen addirt, giebt

$$u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2uy + 2uz + 2yz + 2xy + 2xz = 1269.$$

d. i. $(u + x + y + z)^2 = 1296$

daher $u + x + y + z = 36$.

Wird nun jede der vier gegebenen Gleichungen durch

diese letztere dividirt, so erhält man $u = \frac{252}{36} = 7$, entspricht dem Buchstaben G. $x = \frac{504}{36} = 14$, entspricht O. $y = \frac{396}{36} = 11$, entspricht L. $z = \frac{144}{36} = 4$, entspricht D. Die vier Buchstaben sind also

G O L D. Das Metall heißt daher Gold.

393 k.

Hier hat man folgende zwei Gleichungen:
$x^3y - xy^3 = 983040$ I. $x^4 + x^4z^2 = 3481600$ II.

Man setze $y = xz$, so erhält man

$$x^4z - x^4z^3 = 983040 \quad \text{III.}$$
$$x^4 + x^4z^2 = 3481600 \quad \text{IV.}$$

Aus III folgt $x^4 = \frac{983040}{z - z^3}$ V, und aus IV

$$x^4 = \frac{3481600}{1 + z^2} \quad \text{VI.}$$

Aus V und VI $z^3 + \frac{24}{85} z^2 - z + 85 \times 24 = 0$.

Setzt man $z = \frac{u}{85}$, so erhält man

$$u^3 + 24u^2 - 85^2u + 85^2 \times 24 = 0. \quad \text{VII.}$$

Aus den beiden letztern Gliedern läßt sich schließen, daß $u > 24$.

Da nun das letzte Glied $= 5 \times 17 \times 5 \times 17 \times 1 . 2 . 3 . 4$, so muß man den Versuch mit 2×17 anfangen. Diese bringt die Gleichung nicht auf 0, wohl aber $3 \times 17 = 51$, also $u = 51$, $z = \frac{u}{85} = \frac{3}{5}$, und $y = zx = \frac{3}{5}x$. Daher erhält man aus VI $x^4 = 25 \times 102400$, also $x^2 = 5 \times 320 = 1600$.

Daher $x = 40$, $y = \frac{3}{5}x = 24$. Der Mann war also 40, und die Frau 24 Jahr alt.

Die Zeichenfolge lehrt indessen, daß u in VII noch einen positiven Werth haben muß, und folglich auch x und y, allein diese Werthe sind hier irrational.

393 l.

Es sey die anfangs angelegte Summe $\frac{1}{2}x^2$, so ist diese am Ende des dritten Jahrs x^2 geworden, und $x + 10$ der Gewinn am Ende des vierten Jahrs; das Ganze ist daher auf $x^2 + x + 10$ angewachsen, und daraus am Ende des 7ten Jahrs $(x^2 + x + 10)^2$ geworden.

Daher ist, nach der Aufgabe

$$(x^2 + x + 10)^2 = 62500,$$

also $$x^2 + x + 10 = 250,$$

daher $$x = \frac{-1 + \sqrt{961}}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$x^2 = 225$$

$$\tfrac{1}{2}x^2 = 112\tfrac{1}{2}.$$

393 m.

Die beiden Zahlen seyen x und y, so ist ihre Summe $x + y$ und $10x + y$ des Würfels Seite. Man hat daher nach der Aufgabe

$$(10x + y)^2 \times 6 = (x + y)\,864$$

oder $$(10x + y)^2 = (x + y)\,144 \qquad \text{I.}$$

Ferner ist $$(10x + y)^3 = (x + y)^2 \times 576 \qquad \text{II.}$$

Aus I folgt $$(x + y)^2 = \frac{(10x + y)^4}{(144)^2} \qquad \text{III.}$$

Aus II folgt $$(x + y)^2 = \frac{(10x + y)^3}{576}$$

Aus III u. IV f. $$\frac{(10x + y)^4}{(144)^2} = \frac{(10x + y)^3}{576}$$

oder $$\frac{(10x + y)^4}{(10x + y)^3} = \frac{(144)^2}{576}$$

d. i. $$10x + y = \frac{144}{4} = 36$$ des Würfels Seite

393 n.

Es seyen x, y, z die drei Zahlen, so hat man nach der Aufgabe $xyz = 4096$ I. und $x + z = 68$ II.

Nun ist vermöge der Natur der stetigen geometrischen Proportion $xz = y^2$. Daher folgt aus I $y^3 = 4096$, III.

also $y = 16$ und $xz = y^2 = 256$ IV.

Aus II folgt $x^2 + 2xz + z^2 = 4624$ V.

Aus III folgt $4xz = 1024$

Aus IV u. V folgt $x^2 - 2xz + z^2 = 3600$

also $x - z = 60$ VII.

Aus II und VII folgt $2x = 128$

$2z = 8$

folglich $x = 64$

$z = 4$

$y = 16$

Daher $2y = 32$, das Alter,

$\frac{1}{4}x = 16$, der Monatstag,

$\frac{1}{2}z = 2$, der Monat, oder Februar.

394.

Es sey die Anzahl der kleinern Sorte $= x$; ein Stück koste m Pfennige, also alle mx.

die Anzahl der kleinern Sorte $= y$; ein Stück koste $m + 199$ Pf., also alle $(m + 199)\,y$.

die Anzahl der größern Sorte $= z$; alle kosten $(m + 199)\,y - 744$ Pf.

Daher ein Stück $\frac{(m + 199)\,y - 744}{z}$.

Nach der Aufgabe ist ferner $x + y + z = 100$ I.

und

$x + (my + 199y) + (my + 199y - 744) = 28800$ II.

Da auch für diese Aufgabe x, y, z und m in ganzen und positiven Zahlen verlangt werden; so muß auch

$\frac{(m + 199)\,y - 744}{z} = A$ ganz und positiv seyn. III.

Aus I folgt $x + y \angle 100$. IV.

Aus II folgt $m = \frac{29544 - 398\,y}{x + 2\,y}$. V.

Aus III folgt $398\,y \angle 29544$

$y \angle \frac{29544}{398}$

$y \angle 74\frac{46}{19}$. VI.

Da die Summe der ganzen positiven Größen x und $y \angle 100$ (IV); so wird dadurch schon die Anzahl aller Werthe von diesen Größen auf eine endliche Art beschränkt. Man könnte also dem x der Reihe nach alle Werthe von 1 bis 98 mit eingeschlossen, beilegen, und für jeden derselben y nach und nach die Werthe 1, 2... bis $99 - x$ mit eingeschlossen geben, jede dieser Combinationen, deren Anzahl

$= 4851$ mit den Bedingungen unter II und III zusammenhalten, diejenigen, die mit einer derselben oder mit beiden nicht zusammenstimmen, ausschließen, so würden die zurückbleibenden die vollständige Auflösung geben. Diese Auflösungsart kann indessen noch um ein Beträchtliches abgekürzt werden. Denn, da y in ganzen und positiven Zahlen nur höchstens $= 74$ seyn kann (VI); so darf man nur dem y der Reihe nach die Werthe von 1...74; dem x aber, für jeden Werth von y, die Werthe von 1, 2, 3 ... $99 - y$ beilegen; so sinkt obige Anzahl von Combinationen bis auf 4551 herunter. Allein man sieht leicht, daß es unnöthig sey, bei einem bestimmten Werth von y, dem x **alle** Werthe zwischen jenen Grenzen beizulegen, und sie mit den Bedingungen II und III zusammenzuhalten. Denn nach V muß $x + 2y$ ein Faktor von $29544 - 398y$ werden, und da $x + 2y > 2y$ und $< x + 2y + z$, d. i. $< 100 - y$, so folgt, daß, wenn man alle Faktoren von $29544 - 398y$, welche zwischen den Grenzen $2y$ und $100 + y$ (ausgeschlossen) liegen, der Reihe nach $= x + 2y$ setzt, und daraus x bestimmt, man alle Werthe von x und y, die den beiden erstern Bedingungen Genüge leisten, vollkommen bekommen werde. Alle Auflösungen der Aufgabe lassen sich dann daraus ableiten, wenn man diejenigen Werthe von x und y allein zurückbehält, die auch der Bedingung III ein Genüge leisten.

Diese Methode ist indeß immer noch lästig; es folgt daher hier eine andere weit bequemere, welche auf folgenden Sätzen beruht: 1) Wenn der Unterschied zweier Zahlen a und b durch eine dritte c dividirt, also $\frac{a - b}{c}$ eine ganze

Zahl seyn soll, so muß entweder sowohl a als b durch c ohne Rest theilbar seyn, oder beide müssen bei der Division durch c gleiche Reste übrig lassen. 2) Wenn eine Zahl f mit m multiplicirt, und durch c dividirt den Rest r geben soll, so darf man nur, um m zu finden, f durch c dividiren, und sich den Rest merken; ist dieser $= r$, so ist $m = 1$ eine Auflösung der Aufgabe; ist aber der Rest nicht $= r$, so sey er $= p$. Man bestimme nun m so, daß $\frac{mp - r}{c}$ eine ganze Zahl wird, so wird das auf diese Weise bestimmte m der Aufgabe Genüge leisten. Gesetzt z. B. die Zahl 13 soll so mit einer andern multiplicirt werden, daß das Produkt, durch 5 dividirt, 2 zum Rest übrig läßt, so dividire man 13 durch 5; dies giebt 3 zum Rest; man setze daher $\frac{3m - 2}{5} = n$, so muß n eine ganze Zahl seyn.

Nun ist
$$3m - 2 = 5n$$
$$3m = 5n + 2$$
$$m = \frac{5n + 2}{3}$$
$$m = n + \frac{2n + 2}{3}$$
$$= n + 2\left(\frac{n + 1}{3}\right)$$

Man setze $n + 1 = 3p$, so ist $n = 3p - 1$
und $m = 5p - 1$

Setzt man nun $p = 1, 2, 3, 4, 5$ u. s. w.
so wird $n = 2, 5, 8, 11, 14$ »
und $m = 4, 9, 14, 19, 24$ »

Da nun in der vorliegenden Aufgabe $x + 2y$ ein Factor von $29544 - 398y$ seyn muß,

$x + y$ aber < 100
und $y < 74\frac{46}{199}$
so ist $x + 2y < 174\frac{46}{199}$

Indeß sieht man leicht, daß $x + 2y$ weder $= 1$, noch $= 2$ seyn kann, weil sonst x und y keine ganze Zahlen werden können. Man setze daher nach und nach für $x + 2y$ die Zahlen von 3 bis 174, dividire durch sie sowohl 29544 als 398, und merke sich die Ueberreste; sind diese bei beiden Zahlen gleich, wie z. B. wenn man $x + 2y = 13$ gesetzt, wo beide Divisionen 8 zum Rest geben, so ist $y = 1$, also $2y = 2$, und folglich, da $x + 2y = 13$, $x = 11$, und $m = \frac{29544 - 398}{13} = 2242$. Eine andere Zahl kann aber für y nicht gesetzt werden, weil derselbe Rest, nämlich 8, nicht eher wieder kommen kann, bis man $y = 14$ setzt, und hier also nicht Statt findet, weil dies größer als $x + 2y = 13$ ist. Sind aber die Reste ungleich, so bestimme man nach (2) y so, daß sie gleich werden, so erhält man ebenfalls eine Auflösung der Gleichung V. Gesetzt, man habe $x + 2y = 7$ gesetzt, so giebt 29544, durch 7 dividirt, 4, 398 aber, durch 7 dividirt, 6 zum Rest. Man setze daher $\frac{6y - 4}{7}$

oder $\frac{3y - 2}{7} = n =$ einer ganzen Zahl;

also $3y = 7n + 2$
$$y = 2n + \frac{n + 2}{3}$$

Es sey $n + 2 = 3p$

also $n = 3p - 2$

$y = 7p - 4$

Nimmt man $p = 1$, so ist $y = 3$, $2y = 6$, $x = 1$ und $m = \frac{29544 - 398 \times 3}{7} = 4050$. Eine andere Zahl als 1 darf man für p nicht setzen, weil sonst $y > 7$ wird. Es kann überhaupt jede Zahl, welche man für $x + 2y$ setzt, nur **einen** brauchbaren Werth für y geben, welches davon herrührt, weil die beiden Zahlen 29544 und 398 keinen anderen gemeinschaftlichen Theiler als 2 haben; denn setzt man z. B. $x + 2y = 12$, so sind die Reste 0, 2; man hat daher $\frac{2y}{12} = \frac{1}{6}y = n$, also $y = 6n$, wo man für n nur 1 setzen kann, selbst wenn man $x = 0$ gelten lassen will, denn ist $n = 2$, so wird $y = 12$, also $x = 0$. Hieraus sieht man, daß die Anzahl aller Auflösungen, welche der Gleichung V, oder, welches einerlei ist, den Bedingungen I u. II Genüge leisten, gewiß nicht größer als 172 seyn kann, weil man für $x + 2y$ nur die Zahlen von 3 bis 174 setzen darf. Allein so viele Auflösungen können nicht einmal Statt finden, indem viele von diesen Substitutionen gar keine Auflösung geben können, wie z. B. wenn man $x + 2y = 9$ setzt. Hat man nun auf diese Weise die Auflösungen für die Gleichung V gefunden, so behält man diejenigen zurück, welche auch der Bedingung III Genüge leisten, so ist hier z. B. die obige Substitution von 13 oder 7 unbrauchbar, denn nach der ersten wird $z = 88$, und nach der zweiten $z = 96$, es ist aber weder

$\frac{2252 + 199 - 744}{88}$ noch $\frac{(4050 + 199)\,3 - 744}{96}$ eine ganze Zahl. Setzt man aber $x + 2y = 16$, so findet man $y = 4$, folglich $x = 8$, $z = 88$, und $m = 1747$. Hier ist

$$\frac{(1747 + 199)\,4 - 744}{88} = \tfrac{7040}{88} = 80$$

eine ganze Zahl, also eine Auflösung für die Aufgabe. Verfährt man nun auf diese Weise, so findet man folgende eilf Auflösungen:

z	A
y	m + 199
x	m

I.

88	80
4	1946
8	1747

II.

68	90
8	858
24	659

III.

69	124
12	775
19	576

IV.

48	131
12	586
40	387

V.

56	198
24	493
20	294

VI.

36	346
40	330
24	113

VII.

33	384
43	312
24	113

VIII.

13	716
28	359
59	160

IX.

23	576
53	264
24	65

X.

9	1264
40	303
51	104

XI.

3	4088
48	271
49	72

Von welchen nur die Resultate aus VII im Exempelbuche angegeben worden.

395.

Setzt man in die Formel 11 von 124a $a = 4$, $S = 39364$, $n = 9$, so erhält man $e^9 - 9841e + 9840$

$= 0$, wo man gleich sieht, daß $e = 1$ die Gleichung auf 0 bringt, also $e = 1$ eine Wurzel dieser Gleichung. Da nun (nach Formel 1, 124 a.) $u = ae^{n-1}$, so wäre hier $u = a = 4$, welches nicht seyn kann. Die Wurzel $e = 1$ ist also hier unbrauchbar. Man versuche daher 3, welche ebenfalls die Gleichung auf 0 bringt. Man kann sich hierzu der Logarithmen bedienen, denn es ist

$$\text{Log. } 3 = 0{,}4771213$$
$$9 \text{ Log. } 3 = 4{,}2940917$$

zu welchem die Zahl 19683 gehört. Die Gleichung wird daher $19683 - 29523 + 9840 = 0$; folglich $e = 3$ eine Wurzel der Gleichung. Setzt man nun diesen Werth von e in die Formel 1. $u = ae^{n-1}$, also hier $u = 4 \times 3^8$, so hat man, da eben gefunden worden $3^9 = 19683$, $3^8 = 6561$, $u = 4 \times 6561 = 26244$. Andere positive Werthe von e, und folglich auch von u, sind, wie die Folge der Zeichen in der Gleichung lehrt, nicht möglich.

396.

Da bei jeder geometrischen Progression, das erste Glied ein Factor sowohl des letzten Gliedes als der Summe aller Glieder seyn muß, und hier nur von ganzen Zahlen die Rede seyn kann, die beiden Zahlen 7161 und 3584 aber keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben als 1 und 7, ersterer aber hier nicht Statt findet, weil sonst, nach (124 a. 3), e irrational wird, so folgt, daß das erste Glied $= 7$ seyn muß.

Will man aber die Aufgabe durch eine Gleichung auflösen, so bediene man sich der Formeln 1 und 7 in 124 a. Aus diesen erhält man

$$e\ (S - u) - e^{n-1} S + u = 0$$

also hier $e^{10}(3577) - e^9(7161) + 3584 = 0$ oder, wenn man durch 7 dividirt,

$$511 e^{10} - 1023 e^9 + 512 = 0$$
$$\text{oder} \quad e^{10} - \tfrac{1023}{511} e^9 + \tfrac{512}{511} = 0$$

Man setze $e = \frac{y}{511}$, so erhält man

$$\frac{y^{10}}{(511)^{10}} - \frac{1023 y^9}{(511)^{10}} + \tfrac{512}{511} = 0$$
$$\text{oder } y^{10} - 1023 y^9 + 512 \times (511)^9 = 0$$
$$\text{oder } y^{10} - 1023 y^9 + (2 \times 511)^9 = 0$$

Welche Gleichung auf 0 gebracht wird, wenn $y = 511$, oder $= 2 \times 511$. Der erste Werth ist unbrauchbar, weil sonst $e = \frac{y}{511} = 1$ und nach (1) $a = u$ wird; es findet daher nur der zweite Statt, folglich $e = \frac{y}{512} = 2$ und also nach (2) $a = \frac{3584}{(2)^9} = \frac{3584}{512} = 7$.

397.

Setzt man in die Formel (11. 124 a.) $a = 5$, $S = 49205$, $n = 9$, so erhält man

$$e^9 - 9841 e + 9840 = 0$$

eine Gleichung, welche einerlei mit der von 395 ist, folglich auch hier $e = 1$, oder $e = 3$ wo ebenfalls nur der letzte Werth anwendbar ist.

398.

Hier bediene man sich der in 396 gebrauchten allgemeinen Formel $e^n(S - u) - e^{n-1} S + u = 0$, wo $S = 117186$, $u = 93750$, und $n = 7$ ist, so hat man $23436e^7 - 117186e^6 + 15625 = 0$, oder wenn man durch 6 dividirt,

$$3906e^7 - 19531e^6 + 15625 = 0$$

oder $$e^7 - \tfrac{19331}{3906}e^6 + \tfrac{15625}{3906} = 0$$

Man setze $e = \frac{y}{3906}$, so erhält man

$$\frac{y^7}{(3906)^7} - \frac{19531\,y^6}{(3906)^7} + \tfrac{35625}{3906} = 0$$

$$y^7 - 19531y^6 + 15625 \times (3906)^6 = 0$$

oder $$y^7 - 19531y^6 + (5 \times 3906)^6 = 0$$

welche Gleichung auf 0 gebracht wird, wenn $y = 3906$, oder $= 5 \times 3906$; der erste Werth findet nicht Statt, also $e = \frac{y}{3906} = \frac{5 \times 3906}{5} = 5$.

Bemerkung. Die Auflösungen der Aufgaben der beiden folgenden Abschnitte werden gefunden, wenn man sich der bei jeder Aufgabe im Exempelbuche angezeigten Formeln bedient, und sind daher hier übergangen.

Anhang.

Noch einige Aufgaben mit ihren Auflösungen.

1.

Zwei Zahlen x und y von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn die eine zum Quadrat der andern addirt wird, ein Quadrat entstehe, dessen Wurzel die Summe beider Zahlen sey.

Auflösung.

Nach der Aufg. ist $x + y^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Daher $x = x^2 + 2xy$

$1 = x + 2y$

$y = \frac{1 - x}{2}$

Sollen x und y positiv seyn, so müssen beide echte Brüche seyn. Man setze daher $x = \frac{z}{n}$, so ist

$$y = \frac{1 - \frac{z}{n}}{2} = \frac{n - z}{2n}.$$

Nimmt man daher $n = 2, 3, 4, 5$ u. s. f.

und $z = 1, 1, 1, 1$ „

so wird $x = \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}$ „

und $y = \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{2}{5}$ „

Nimmt man $n = 3, 4, 5, 6$ u. s. f.

und $z = 2, 2, 2, 2$ „

so wird $x = \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{3}$ „

und $y = \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{3}$ „ u. s. f.

2.

Zwei Zahlen x und y zu finden, von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zum Quadrat der andern addirt wird, ein Quadrat entstehe, dessen Wurzel die Differenz beider Zahlen sey.

Auflösung.

Nach der Aufg. ist $x + y^2 = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Daher $x = x^2 - 2xy$

und $1 = x - 2y$

$y = \frac{x - 1}{2}$.

Soll nun y eine ganze Zahl werden, so muß x eine ungerade Zahl, aber > 1 (weil sonst $y = 0$ ist) werden.

Wenn nun $x = 3,\ 5,\ 7,\ 9$ u. s. f.

so ist $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ »

3.

Es sollen zwei Zahlen x und y gefunden werden, von der Beschaffenheit, daß die Differenz zwischen dem Quadrat der einen und der andern so groß sey, als das Quadrat der Summe beider.

Auflösung.

Nach der Aufg. ist $x^2 - y = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$$\text{Daher} \quad -y = 2xy + y^2$$

$$-1 = 2x + y$$

$$\text{und} \quad x = \frac{-y-1}{2}.$$

Daher giebt jede für y angenommene positive ungerade Zahl > 1 einen Werth in ganzen Zahlen, für x aber negativ; jede ungerade negative Zahl für y aber einen positiven Werth für x in ganzen Zahlen, jede positive gerade Zahl für y giebt einen negativen, und jede negative einen positiven Bruch für x. Daher ist die Aufgabe unmöglich, wenn zwei positive Zahlen von der in der Aufgabe angegebenen Beschaffenheit verlangt werden.

4.

Man soll zwei Zahlen x und y finden, von der Beschaffenheit, daß die Differenz zwischen der einen und dem Quadrat der andern so groß sey, als das Quadrat der Summe beider.

Auflösung.

Nach der Aufg. ist $x - y^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Man setze $x = yz$, so erhält man $yz - y^2 = y^2z^2 + 2y^2z + y^2$

$$z - y = yz^2 + 2yz + y$$

$$\text{Daher} \quad z = y(z^2 + 2z + 2)$$

$$\text{Folglich} \quad y = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}$$

y muß daher ein echter Bruch seyn, man mag für z eine ganze Zahl, einen unechten oder echten Bruch setzen, weil $z < 2z$, und daher auch x ein echter Bruch.

Nimmt man daher $z = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ u. s. f.

so wird $y = \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{17},\ \frac{2}{13},\ \frac{5}{37}$ »

und $x = \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{9}{17},\ \frac{8}{13},\ \frac{25}{37}$ »

Da z auch ein Bruch seyn kann, so setze man $z = \frac{m}{n}$,

$$\text{wird} \quad y = \frac{nm}{m^2 + 2mn + 2n^2}$$

und $x = yz = \dfrac{m^2}{m^2 + 2mn^2 + 2n^3}$, wo m und n beliebig angenommen werden können.

5.

Zwei Zahlen x und y zu finden, deren Summe der Summe ihrer Quadrate gleich sey.

Auflösung.

Nach der Aufgabe ist $x + y = x^2 + z^2$. Man setze $x = yz$, so erhält man $yz + y = y^2z^2 + y^2$.

$$\text{Daher} \quad z + 1 = yz^2 + y$$

$$y = \frac{1 + z}{1 + z^2}.$$

Soll y eine ganze Zahl seyn, so muß $z = 1$ seyn, denn für jede andere ganze Zahl sowohl, als für jeden unechten Bruch ist $z < z^2$ und also y ein echter Bruch; ist z aber ein echter Bruch, so sey $z = \frac{m}{n}$, wo also $m < n$, so wird $y = \frac{n^2 + mn}{n + m^2}$; man setze ferner $n = m + d$,

so wird $y = \frac{2m^2 + 3md + d^2}{2m^2 + 2md + d^2}$

$= 1 + \frac{md}{2m^2 + 2md + d^2}$, also y ein unechter Bruch. Es kann daher in ganzen Zahlen nur $x = 1$ und $y = 1$ seyn. Will man aber mit Brüchen zufrieden seyn, so hat man für $z = \frac{m}{n}$ $y = \frac{n^2 + mn}{n^2 + m^2}$ und

$x = yz = \frac{mn^2 + m^2n}{n^3 + m^2n}$, wo $m >$ oder $< n$ seyn kann.

Setzt man	$m = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$	u. s. w.
und	$n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$	»
so ist	$y = \frac{6}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{20}{17},\ \frac{15}{13},\ \frac{42}{37},\ \frac{28}{25}$	»
und	$x = \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{17},\ \frac{3}{13},\ \frac{7}{37},\ \frac{4}{25}$	»

6.

Zwei Zahlen x und y zu finden, von der Beschaffenheit, daß die Summe ihrer Quadrate um das doppelte Quadrat der einen größer sey, als die Summe der beiden Zahlen.

Auflösung.

Hier hat man die Gleichung $x^2 + y^2 = x + y + 2x^2$

Man setze $x = yz$,

so erhält man

$$y^2z^2 + y^2 = yz + y + 2y^2z^2$$
$$y^2 = yz + y + y^2z^2$$
$$y = z + 1 + yz^2$$
$$y - yz^2 = z + 1$$
$$y = \frac{1 + z}{1 - z^2} = \frac{1}{1 - z}$$

Sollen x und y ganze positive Zahlen seyn, so muß $z < 1$, also ein echter Bruch seyn. Man setze diesen

$= \frac{m}{m + d}$, so wird $1 - z = \frac{d}{m + d}$ und daher

$$y = \frac{m + d}{d} = 1 + \frac{m}{d} \text{ und } x = yz = \frac{m}{d}.$$

Es muß daher d ein Faktor von m seyn, wenn x und y ganze Zahlen seyn sollen.

Der echte Bruch, den man für z setzen kann, muß daher so beschaffen seyn, daß die Differenz zwischen dem Zähler und Nenner in dem Zähler aufgeht. Dies ist aber nur möglich, wenn die Differenz oder $d = 1$ ist; vorausgesetzt, daß der Bruch durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt ist. Denn, wäre $d > 1$, so müßte diese Zahl, weil sie in m aufgeht, auch in $m + d$ aufgehen, der Bruch $\frac{m}{m + d}$ wäre mithin nicht durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt.

Setzt man daher	$z = \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7}$	u. s. f.
so ist	$y = 2, 3, 4, 5, 6, 7$	»
und	$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$	»

Eine andere Auflösung.

Aus der Gleichung $x^2 + y^2 = x + y + 2x^2$ folgt

$$y^2 = x + y + x^2$$

also $y = \sqrt{(x + y + x^2)}$

Um die Größe unter den Wurzelzeichen rational zu machen, setze man $x + y = 2x + 1$, denn alsdann ist $y = \sqrt{(x^2 + 2x + 1)} = x + 1$, wo man x beliebig annehmen kann.

Verbesserungen.

S. 25, Z. 4, v. u. nach »ist« l. nach der Aufgabe.

S. 78, Z. 6, st. 54. l. 55.

S. 112, Z. 10, st. $+\sqrt{16}$ l. $-\sqrt{16}$.

Auch ist aus Versehen die Auflösung von Nro. 57 nach der alten Ausgabe abgedruckt, wovon die Verbesserung auch schon am Ende des Uflakkerschen Exempelbuchs angezeigt ist. Die richtige Auflösung ist nämlich folgende:

In allen 3 Beuteln sey x, also im ersten $\frac{1}{4}x$, im zweiten $\frac{3}{8}x$, mithin in beiden $\frac{5}{8}x$, folglich im dritten $\frac{3}{8}x$, daher nach der Aufgabe

$$\begin{aligned} \tfrac{5}{8}x &= 100 \\ 5x &= 800 \\ x &= 160 \\ \tfrac{1}{4}x &= 40 \\ \tfrac{3}{8}x &= 60 \end{aligned}$$

S. 130, Z. 13, v. o. st. 214 l. 224.

S. 151, Z. 3, v. u. st. 8S l. $\frac{8S}{16}$.